第1章

等式中的差异性

等式有两类，一类是恒等式，一类是条件等式. 例如

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

对于使等式有意义的一切 x 都成立，是恒等式；而等式

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

是在 a,b,c 为实数，$|a|+|b|\neq0$，$\alpha\neq2k\pi+\beta$（$k\in\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$ 表示整数集），而且满足

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=c$$

$$a\sin\beta+b\cos\beta=c$$

的条件下成立的，是条件等式.

对于恒等式，一般说来，等号的左边与右边既有内容的不同，也有形式的不同. 就三角等式来说，这种不同主要表现在角、函数以及运算上. 例如前面所举的第一个例子，等号左边的角是 x，而右边的角是 $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$；左边的函数是正弦、余弦，而右边的函数是正切；左边的运算是和商（分子是和的

形式),而右边是积.对于条件等式来说,除了等式本身左边与右边有角、函数、运算的差异性外,已知条件与所求证的等式也有角、函数、运算的差异性.例如所举的第二个例子,已知条件中的角是α,β,而在求证式中的角是$\frac{\alpha-\beta}{2}$;就运算来说,已知条件等号左边是和,求证式左边是积;已知条件中,a,b,c是一次的,而求证式中a,b,c是二次的,而且有a^2+b^2等.

证明恒等式时,一般地总是从较复杂的一边开始,通过化简得出简单的一边;有时可以分别从两边同时化简,得出相同的结论;有时也可以从某一恒等式出发做恒等变形而得出求证的等式.证明条件等式时,可将条件式代入求证式的一边,再经变形而得出另一边;也可以由条件式做等式的变形而得出求证式.在实际解题时,上述所说的等式变形是有规律的,化简是有目的的.就三角等式的证明来说,是将不同的角、函数、运算通过等式变形转化为相同的角、函数、运算.也就是说,一个三角等式的正确证明过程,就是消灭等式左边与右边的角、函数、运算的差异的过程.当这三种差异全部消失了,等式的证明也就完成了.

第2章

正确、全面地理解和掌握公式

正确、全面地理解和掌握公式，目的在于应用. 什么叫“正确、全面地理解和掌握公式”呢？就三角的证明问题来看，我们前面已经说过，要完成等式的证明，就是要消除等式左边与右边的角、函数和运算的差异. 由此对于三角公式的正确、全面地理解和掌握就应该从角、函数、运算这三个基本角度去观察公式，记忆公式. 例如正弦的二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

从角的差异来观察，等号左边是右边的二倍角. 由此它可以派生出其他形式

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$

$$\sin 5\alpha=2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

等. 也就是任何角都是它的半角的二倍，它的正弦总可以用它的半角的函数来表示；从函数的差异来观察正弦二倍角公式，等号左边是正弦，右边是正弦和余弦之积的二倍；从运算来看，是把一次式变为二次式. 要记忆正弦二倍角公式，还要记住由运算产生的如下一些形式

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha \qquad (1)$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha \qquad (2)$$

$$\sin\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} \qquad (3)$$

$$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha} \qquad (4)$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=\cos\alpha \qquad (5)$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=\sin\alpha \qquad (6)$$

等. 即当我们在解题时，见到上述诸等式的左边，应能立即知道它相等的右边，并且仍然要从角、函数、运算三方面记忆它们的特征. 如(1)，(2)两个等式，将单角变为二倍角，将正弦、余弦转化为正弦，把二次式降为一次式；(3)，(4)两个等式，将积变为商；而式(4)将余弦变为正弦；式(5)，(6)将商化为积，式(5)又将正弦化为余弦.

同样，对余弦的二倍角公式

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha \qquad (7)$$

要记住式(7)将 2α 变为 α，将积化为差，将一次式化为二次式. 式(7)中第二式将正弦化为余弦，式(7)中第三式将余弦化为正弦. 它又可派生出很多公式，诸如

$$\cos^2\alpha=\cos 2\alpha+\sin^2\alpha \tag{8}$$

$$\cos 2\alpha-\cos^2\alpha=-\sin^2\alpha \tag{9}$$

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha \tag{10}$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha \tag{11}$$

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\cos 2\alpha \tag{12}$$

等.式(8)是积化和;式(9),(10),(11)是和差化积;式(9),(11)是将余弦化为正弦;式(10),(11)是将一次式化为二次式;而式(12)又是将二次式化为一次式.

再观察同角的三角函数的平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{13}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \tag{14}$$

$$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha \tag{15}$$

等.若从运算上来看,式(13),(15)正是和差化积,式(14)则是积化为差;若从函数来看,式(14),(15)都可以将正弦变为余弦;从角来看,式(14),(15)的角没有变化,而式(13)将 α 变没有了(这正是在三角函数关系中消元法的重要依据).

与上面所举的例子相同,对于平面三角中的一切公式:同角三角函数的关系,诱导公式、和角公式、差角公式、倍角公式、半角公式、和差化积公式、积化和差公式,正弦定理、余弦定理、面积公式乃至反三角函数的公式,都应该而且必须从角、函数、运算这三个主要方面去理解,去记忆,去掌握.

当我们将一个公式经过前面反复琢磨、推敲之后,要做到“全面”,还应该进行归类:哪些公式可以帮助我们将一个角转化为另一个角的,哪些公式可以帮助我们将一个函数转化为另一个函数的,哪些公式又可以帮助我们将一种运算转化为另一种运算的.我们发现:

1. 有利于角的转化的公式有和角公式、差角公式、倍角公式、半角公式，不仅如此，诱导公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

等，也可以帮助我们将一个角变为另一个角. 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

则将 α,β 转化为$\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2}$那样的角. 而积化和差公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

又将 α,β 转化为 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 那样的角. 乃至同角关系

$$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$$

等，也可以帮助我们将 α 消掉.

2. 有利于函数转化的公式有同角三角函数的 8 个关系式. 另外诱导公式

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$$

等，可将一函数转化为它的余函数；二倍角公式

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha$$

$$1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$

以及半角公式

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

等，都可以将一个函数转化为另一个函数；另外，和角公式与差角公式，和化积公式与积化和公式等，在帮助将一个函数转化为另一个函数时，也可以出一份力量. 例如

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

就可以把余弦转化为正弦.

3. 有利于运算转化的公式有和差化积公式、积化和差公式. 此外，我们也知道下列公式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

等，都可以将和、差化为积. 若将上述等式自右化到左，又都可以视为积化和、差的公式. 另外，代数中的常用乘法公式，各种代数公式，如数列求和公式等，乃至分式的通分，根式的性质运算等，无疑都是运算转化的有力工具.

当我们对公式和概念都进行了类似上面那样深入的分析，正确、全面地理解之后，我们便为等式的证明打下了良好的基础.

三角恒等式的证明Ⅰ

第3章

例1 求证：$\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$.

思考方法 等式左边是单角 x，右边是半角$\dfrac{x}{2}$与$\dfrac{\pi}{4}$的和$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}$；从函数看，左边是正弦、余弦，而右边是正切；从运算看，左边是和商，右边是积. 三类差异一目了然.

若我们先从消灭角的差异入手

$$\text{左边}=\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

这一步我们将 x 变为$\dfrac{x}{2}$，这无疑向右边接近了. 但下步如何做，看不出来. 从右边入手

$\text{右边}=\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$（用和角公式使左、右角的差异消失）$=\dfrac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$（用同角比例关系使左边函数、右边函数的差异消失）.

现在只剩下运算的差异了. 左、右两式现在都是分式. 要证两分式相等,首先应使分母或分子相同. 为此通分,得

$$\text{右边}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

再与左边比较. 分母相同,分子的差异只在 1 与 $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$是否相等,而这正是同角三角函数中的平方关系之一.

若我们从运算入手,则我们自然想到将左边的分子和化积. 而分子是 $1+\sin x$,无现成公式. 要化积可将 $1+\sin x$ 化为 $\sin\frac{\pi}{2}+\sin x$ 或化为 $1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$,然后再用和化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\tag{1}$$

或用二倍角公式

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\tag{2}$$

就可以达到化积的目的. 不妨我们用公式(2),则有

$$\text{左边}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$$

这一步不仅消灭了和与积的差异，而且在分子上出现了角$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$，这与右边的角一致. 而右边是

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

比较后，我们猜想左边分母应该有 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$，可与分子中多余的这个因式相约去. $\cos x$ 如何能分出因子 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$呢？ 首先由 x 与$\frac{x}{2}$的差异，我们想到要用二倍角公式. 但不能直接用二倍角公式，因为这样得不到$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$. 要得到$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$，必须先得到$\frac{\pi}{2}+x$，由此想起诱导公式

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\quad(3)$$

若我们从函数入手，我们看到左边是正弦与余弦，而右边是正切. 所求证的等式自然使我们联想到半角公式

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\quad(4)$$

公式(4)可以帮助我们将正切转化为正弦、余弦. 由此

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\quad(5)$$

此时式(5)右边与左边只剩下角的差异：$\frac{\pi}{2}+x$ 与 x 的差异，只需利用诱导公式即可.

证法 1　左边$=\dfrac{1+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=$

$$\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=$$

$$\dfrac{\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}=$$

$$\dfrac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{x}{2}}=$$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)=$右边

证法 2　左边$=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{\cos x}=\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x}=$

$$\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}=$$

$$\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}=$$

$$\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}=$$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)=$右边

证法 3 右边$=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=$左边

从例 1 的思考及证明中可见，我们从三个不同的角度出发，得到三种不同的证法. 一般的三角恒等式中，角、函数、运算这三种差异都存在. 那么在证明等式时，到底是先消灭哪种差异呢？原则上讲，从消灭任何一个差异入手都可以. 但对具体问题而言，则情形就不一样了. 有的可能从消灭角的差异容易些，有的则可能先消灭函数或运算的差异容易些. 事实上，既然一个问题中包含了几种不同的差异，那么必有一种差异占据主要地位. 它的解决必然影响其他差异的解决. 譬如例 1 的第二个证法，我们着手从运算去解决差异，结果角的差异也随之逐渐解决. 至于如何找出占统治地位的差异，则应从条件和结论，等式的右端与左端的联系、结构的特点去寻找.

例 2 求证：$2\sin\theta+\sin 2\theta=4\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

思考方法 等式左边的角是 θ，2θ，右边是 θ，$\dfrac{\theta}{2}$；运算方面，左边是和，右边是积. 分析左右的差异，左边第一项有 $\sin\theta$，而右边有 $\sin\theta$ 的因式，由此可知左边的 $\sin 2\theta$ 应该用二倍角公式化为 θ，然后提出 $\sin\theta$ 这个因式来，再进一步和化积即可达到目的.

证明 左边$=2\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta=$

$2\sin\theta(1+\cos\theta)=$

$2\sin\theta\cdot 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=$

$4\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}=$

右边

例 3　求证：$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

思考方法　等式左边的角 α,β 是单角，右边是和差角之半 $\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. 要把 α,β 转化为 $\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 可用和差化积公式，然后再用同角三角函数关系式将正余弦化为正余切即可.

证明　左边 $=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=$

$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}=$

右边

例 4　求证

$$\sqrt[3]{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(1+2\sin\alpha\cos\alpha)(1-\sin 2\alpha)}=-\cos 2\alpha$$

思考方法　左边的角有 $\alpha,2\alpha$，右边是 2α. 故先可从角入手，将左边的 α 转化为 2α. 因为等式右边的函数是余弦，故再用角关系将正弦转化为余弦，剩下只需用根式的性质即可达到目的.

证明　左边 $=\sqrt[3]{-\cos 2\alpha(1+\sin 2\alpha)(1-\sin 2\alpha)}=$

$\sqrt[3]{-\cos 2\alpha\cdot(1-\sin^2 2\alpha)}=$

$\sqrt[3]{-\cos 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha}=$

$\sqrt[3]{-\cos^3 2\alpha}=-\cos 2\alpha=$

右边

例 5 求证

$$\cos\alpha-\cos 2\alpha=6\sin^2\frac{\alpha}{2}-8\sin^4\frac{\alpha}{2}$$

思考方法 左边的角有 α，2α，右边的角是 $\frac{\alpha}{2}$，故应该采用余弦的二倍角公式. 左边的函数是余弦，右边的函数是正弦，故采用的二倍角公式应该是 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$. 当角、函数的差异消失后，只需利用乘法公式以及代数中的合并同类项即可.

证明 左边 $=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-(2\cos^2\alpha-1)=$

$$1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2+1=$$

$$1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}+4\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)+1=6\sin^2\frac{\alpha}{2}-8\sin^4\frac{\alpha}{2}=$$

右边

注 在证明的第一步中为什么对 $\cos 2\alpha$ 采用 $2\cos^2\alpha-1$ 展开，而不用 $1-2\sin^2\alpha$ 呢？这是因为将 α 变为 $\frac{\alpha}{2}$ 时，$1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ 后，还需用同角关系将 $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ 转化为 $1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$，而这样做没有第一方案来得更直接.

例 6 求证

$$\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

思考方法 等式左边的角是 α，β，而右边是 $\frac{\alpha-\beta}{2}$，故可用和差化积公式. 因左边是和，右边是积，故当提

取公因式 $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$后，括号内正好是正弦差角公式，故可用差角公式进一步化积即达到目的.

证明　左边 $=-\cos\alpha\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+$

$$\sin\alpha\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-\cos\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\right.$$

$$\left.\sin\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\text{右边}$$

从例 2 到例 6 的证明，我们都是从角入手，采取适当的公式达到角的转化. 在这里，有的是用倍角公式，有的是用和差化积，都帮助我们达到了角转化的目的. 这里，和差化积不是目的，而是为达到角转化的手段. 在例 6 中，我们利用了差角公式，是为了达到和化积的目的. 所有这些读者都应心领神会.

例 7　求证：$\frac{\tan\theta+\tan\varphi}{\tan\theta-\tan\varphi}=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\theta-\varphi)}$.

思考方法　等式左边的函数是正切，右边是正弦；左边的角是单角 θ,φ，右边的是和角 $\theta+\varphi$ 与差角 $\theta-\varphi$；左边是和商，右边是积商. 若从函数入手，则应该用同角三角函数的关系，将正切化为正余弦的商，分子分母同乘 $\cos\alpha\cos\varphi$，然后再用和角、差角公式化单角 θ,φ

为 $\theta+\varphi$,$\theta-\varphi$,即可达到目的.

证明 左边$=\dfrac{\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi}=$

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\theta-\varphi)}=\text{右边}$$

例 8 求证:$\dfrac{4\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)}{\sec\alpha(1+\tan^2\alpha)}=\sin 4\alpha$.

思考方法 左边是 α,右边是 4α;左边函数有正弦、正切、正割,右边是正弦;从运算上看,左边是带和差的积商,而右边是积. 若从函数入手,可先将分母中的 $1+\tan^2\alpha$ 化为 $\sec^2\alpha$,然后将 $\sec\alpha$,$\tan\alpha$ 都转化为正弦、余弦,我们可得到

$$\text{左边}=\frac{4\sin\alpha\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\sec^3\alpha}=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

现剩下的差异主要是角的差异. 可用二倍角公式先将 α 化为 2α,再转化为 4α.

证明 左边$=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$

$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha=$

右边

例 9 求证:$\dfrac{\sec 8\beta-1}{\sec 4\beta-1}=\dfrac{\tan 8\beta}{\tan 2\beta}$.

思考方法 等式左边的函数是正割,而右边是正切;左边是差商,右边是积商. 若从函数入手,注意到正割、正切都是一次的,则要将正割转化为正切,只能先化为正弦、余弦为宜. 由此

$$\text{左边}=\frac{\cos 4\beta(1-\cos 8\beta)}{\cos 8\beta(1-\cos 4\beta)}$$

由于右边是积商,故左边应该在分子分母中将差化积. 此时用余弦二倍角公式,我们得

$$左边=\frac{\cos 4\beta \cdot 2\sin^2 4\beta}{\cos 8\beta \cdot 2\sin^2 2\beta}$$

到这一步，运算的差异消失了，还剩下角的差异和函数的差异. 我们知道

$$右边=\frac{\sin 8\beta\cos 2\beta}{\cos 8\beta\sin 2\beta}$$

为了使左边分子出现 $\sin 8\beta$，再用正弦二倍角公式得

$$左边=\frac{\sin 8\beta\sin 4\beta}{\cos 8\beta \cdot 2\sin^2 2\beta}$$

又从右边可见，并没有 4β，故又应将 $\sin 4\beta$ 用正弦二倍角公式化为 2β，得

$$左边=\frac{\sin 8\beta \cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta}{\cos 8\beta \cdot 2\sin^2 2\beta}=\frac{\sin 8\beta\cos 2\beta}{\cos 8\beta\sin 2\beta}$$

证明　$左边=\frac{\cos 4\beta(1-\cos 8\beta)}{\cos 8\beta(1-\cos 4\beta)}=\frac{\cos 4\beta \cdot 2\sin^2 4\beta}{\cos 8\beta \cdot 2\sin^2 2\beta}=$

$$\frac{(2\sin 4\beta\cos 4\beta)\cdot(2\sin 2\beta\cos 2\beta)}{\cos 8\beta \cdot 2\sin^2 2\beta}=$$

$$\frac{\sin 8\beta\cos 2\beta}{\cos 8\beta\sin 2\beta}=\frac{\tan 8\beta}{\tan 2\beta}$$

从例 9 的思考方法和证明中我们可以看到，三种差异有时是交织在一起的. 第一步从函数入手进行转化，接近目标，但还没有达到消灭函数的差异时，运算的差异已占到主要地位. 故第二步只能先着手处理运算的差异使其达到化积的目的. 此时角的差异又上升到主要地位. 而如何进行角的转化，在这里又很讲究实效. 我们对分子两次同样用正弦二倍角公式：一个是将$2\cos 4\beta\sin 4\beta$转化为$\sin 8\beta$，一个是将 $\sin 4\beta$ 转化为$2\sin 2\beta\cos 2\beta$，从而完成角的转化的目的. 在证明等式的过程中，总是左顾右盼，不断地找出还存在的差异，从实际出发，所有的与最终目标的选择适当的方法和措施，不断地缩小差异，达到最后消灭

所有的与最终目标的差异，完成我们的证明．例9是一个好例子，它向我们展示了一个正确的思路是怎样形成的．

例 10 求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$.

思考方法 等式左边是半角$\frac{\alpha}{2}$，右边是单角α；左边函数是正切，右边是正弦、余弦；左边是积，右边是商．我们自然想到半角公式

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

它正是把$\frac{\alpha}{2}$的正切转化为α的正余弦的商式．比较公式与求证式的差异，想到用代数中的等比定律$\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}\right)$，来解决运算上的差异，即可达到目的．

证明 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=$

$\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha+1+\cos\alpha}=$

右边

例 11 求证：$\frac{1+\tan^2x}{1+\cot^2x}=\left(\frac{1-\tan x}{1-\cot x}\right)^2$.

思考方法 等式左边与右边，角、函数并无差异，只有运算差异．由同角关系易知

$$左边=\frac{\sec^2x}{\csc^2x}=\tan^2x$$

由此只需证右边$=\tan^2x$即可．而这又启发我们在右边的分子中可提出因式$\tan^2x$．事实上，$1-\tan x=\tan x(\cot x-1)$．由此有如下证明．

证明 右边$=\left(\frac{\tan x(\cot x-1)}{1-\cot x}\right)^2=(-\tan x)^2=$

$\tan^2x=$左边

这个证明美吗？请欣赏.

例 12　求证：$\dfrac{1-\csc\theta+\cot\theta}{1+\csc\theta-\cot\theta}=\dfrac{\csc\theta+\cot\theta-1}{\csc\theta+\cot\theta+1}$.

思考方法　等式左边与右边，角、函数均无差异，只有运算上有差异. 要证两分式相等，可通分.

证明　左边$=\dfrac{(1-\csc\theta+\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta+1)}{(1+\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta+1)}=$

$$\dfrac{(1+\cot\theta)^2-\csc^2\theta}{(1+\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta+1)}=$$

$$\dfrac{2\cot\theta}{(1+\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta+1)}$$

右边$=\dfrac{(\csc\theta+\cot\theta-1)(1+\csc\theta-\cot\theta)}{(\csc\theta+\cot\theta+1)(1+\csc\theta-\cot\theta)}=$

$$\dfrac{\csc^2\theta-(1-\cot\theta)^2}{(\csc\theta+\cot\theta+1)(1+\csc\theta-\cot\theta)}=$$

$$\dfrac{2\cot\theta}{(\csc\theta+\cot\theta+1)(1+\csc\theta-\cot\theta)}$$

所以左边＝右边.

例 13　求证：$\dfrac{\tan\alpha\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\sin\alpha}$.

思考方法　本例与例 12 相同. 我们用求差法，证明左右的差为 0 即可.

左边－右边$=\dfrac{\tan^2\alpha\sin^2\alpha-(\tan^2\alpha-\sin^2\alpha)}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\sin\alpha}=$

$$\dfrac{\tan^2\alpha\sin^2\alpha-\tan^2\alpha+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\sin\alpha}$$

为了证明差为 0，只需证分子为 0. 要证分子为 0，就应该将正切、正弦都化为同一个函数，这样才便于合并.

证明　左边－右边$=\dfrac{\tan^2\alpha\sin^2\alpha-\tan^2\alpha+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\sin\alpha}=$

$$\dfrac{\tan^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\sin\alpha}=$$

$$\frac{-\tan^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\sin\alpha}=$$
$$\frac{-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\tan\alpha\sin\alpha}=0$$

所以左边＝右边.

例 14 求证

$$\cos 8\alpha+\cos 10\alpha+3\cos 4\alpha+3\cos 2\alpha=8\cos\alpha\cos^3 3\alpha$$

思考方法 等式左边是和，右边是积.我们从运算入手.由于和差化积公式都是同名函数之前的系数相同，故将左边第一项、第二项为一组，第三项、第四项为另一组.而这样化积的结果，都有 $2\cos\alpha$，这正是右边的一个因式.左边提取公因式后，括号内仍然是和的形式，继续化积.而此时化积的公式，根据这个问题的特殊性，我们应该采用三倍角公式 $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ 的变形

$$\cos 3\alpha+3\cos\alpha=4\cos^3\alpha$$

利用它即可达到化积的目的.

证明 左边$=2\cos 9\alpha\cos\alpha+6\cos 3\alpha\cos\alpha=$
$2\cos\alpha(\cos 9\alpha+3\cos 3\alpha)=$
$2\cos\alpha\cdot 4\cos^3 3\alpha=$
$8\cos\alpha\cos^3 3\alpha=$
右边

例 15 求证

$$\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=$$
$$4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$$

思考方法 等式左边是和，右边是积.故我们对左边和化积.利用和角公式我们可以将 $a\sin x+b\cos x$ 化为 $\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\dfrac{b}{a}\right)$.

左边 $=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+$

$\sqrt{2}\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\right.$

$\left.\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

对于中括号内的三项继续化积. 为了能提出公因式,对第一项、第三项利用和化积公式:$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,得

左边 $=\sqrt{2}\left[2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$2\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$

为了使 $\cos\alpha+\frac{1}{2}$ 化积,将 $\frac{1}{2}$ 变为 $\cos\frac{\pi}{3}$,使用和化积公式 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,最终可将左边化为积的形式. 与右边比较可能还有角、函数的差异,运用诱导公式,即可达目的.

证明 左边 $=2\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=$

$4\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=$

$4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=$ 右边

例 16 求证

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}=\tan 4x$$

思考方法 等式的左边是和商，右边是积商$\left(\tan 4x=\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}\right)$，故应该将左边分子分母化积. 由于右边是 $4x$，根据和化积的公式的特征，由 $\dfrac{1+7}{2}=4$，$\dfrac{3+5}{2}=4$ 可知，将分子、分母第一项、第四项，第二项、第三项分别为一组化积，即可提出公因式 $\sin 4x$ 及 $\cos 4x$，而它们的比恰是等式的右边，我们期望剩下的部分可以约去.

证明 左边$=\dfrac{2\sin 4x\cos 3x+2\sin 4x\cos x}{2\cos 4x\cos 3x+2\cos 4x\cos x}=$

$$\frac{2\sin 4x(\cos 3x+\cos x)}{2\cos 4x(\cos 3x+\cos x)}=$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\tan 4x=\text{右边}$$

例 17 求证

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{1}{\sin(b-c)\sin(b-a)}+$$

$$\frac{1}{\sin(c-a)\sin(c-b)}=$$

$$\frac{1}{2\cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{b-c}{2}\cos\dfrac{c-a}{2}}$$

思考方法 我们从运算入手，对左边进行通分，然后分子化积，以达到右边的积商形式. 我们预测分子化积后，与分母约分，即可达到目的.

证明　左边 $=-\dfrac{\sin(b-c)+\sin(c-a)+\sin(a-b)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}=$

$$-\frac{2\sin\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{b+a}{2}-c\right)+2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}=$$

$$-\frac{2\sin\frac{a-b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}-\cos\left(\frac{b+a}{2}-c\right)\right]}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}=$$

$$-\frac{2\sin\frac{a-b}{2}\cdot 2\sin\frac{a-c}{2}\sin\frac{b-c}{2}}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}=$$

$$\frac{4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}=$$

$$\frac{1}{2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{c-a}{2}}=$$

右边

注 1　在证明过程中的第二步，前两项用和化积公式，最后一项用正弦二倍角公式，这样做是为了可以提出公因式 $2\sin\dfrac{a-b}{2}$；

注 2　在证明的倒数第二步中尽管化积了，但并不是右边，比较与右边的差异，还有角的差异. 将分母的角都化为它们的半角，采用正弦二倍角公式，当角的差异全部消灭了，约简之后，函数的差异也就相应地消失了.

例 18　求证

$$\cos 4\theta\cos\theta-\sin 6\theta\sin 3\theta=\cos 7\theta\cos 2\theta$$

思考方法

等式左边是积差，右边是积，理应将左边化积即

可.但是我们回忆一下所有的可以帮助我们化积的公式,确实找不到一个公式可直接将左边化积的.由于右边是余弦积,我们知道它恰是两个余弦之和化积的结果.事实上,$\cos 7\theta\cos 2\theta=\frac{1}{2}(\cos 9\theta+\cos 5\theta)$.那么我们想左边能否变出$\frac{1}{2}(\cos 9\theta+\cos 5\theta)$呢?我们发现左边第一项化和正好可以出现 $\cos 5\theta$,而第二项化和正好可以出现 $\cos 9\theta$.由此我们采取退一步进二步的方针,先将左边两项都积化和,然后再和化积变为右边.

证明 左边$=\cos 4\theta\cos\theta-\sin 6\theta\sin 3\theta=$

$$\frac{1}{2}(\cos 5\theta+\cos 3\theta)+\frac{1}{2}(\cos 9\theta-\cos 3\theta)=\frac{1}{2}(\cos 5\theta+\cos 9\theta)=$$

$$\cos 7\theta\cos 2\theta=\text{右边}$$

例 18 告诉我们,在三角等式的证明中就运算而言,和差化积、积化和差绝不是一种游戏.它们是解题的有力技巧.有许多问题本身提出的任务,可能并不在于运算的转化,而是为了达到角或函数的变化.我们根据和化积公式或积化和公式对于角或函数的转化所能起到的作用,恰当地运用,能达到理想之效果.为此再观察下面两例.

例 19 求证

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1$$

思考方法 等式左边的角是 $\alpha+\beta,\alpha-\beta,\alpha,\beta$,而右边仅仅是常数 1.从运算来讲,左边是和差,而右边是积.从题目来看,好像角的矛盾尤为突出.我们为了达到 α,β 全部消失,猜想等式左边含 α,β 的项应该全部

能抵消.第一项、第二项是平方和,它们是不会抵消的.第三项是负的,故我们猜到,第一项、第二项之和与第三项合并就可以使 α,β 消失,而第三项是积,为了使 α,β 消失,有两种方案:第一方案是将第三项积化和,分成两项,看能否与第一项、第二项相抵消;第二方案是将第一项、第二项化积,看能否与第三项相抵消.由于和化积的公式都是一次的,故要将第一项、第二项化积,理应先降幂,然后再利用和化积公式.由上述分析我们有如下两个证法.

证法 1　左边 $=\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}[\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)]=\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}[2\cos^2(\alpha+\beta)-1+2\cos^2(\alpha-\beta)-1]=\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)+1=1=$ 右边

注　为了使 α,β 消失,第三项化积后,角是 $2(\alpha+\beta)$,$2(\alpha-\beta)$,与第一项、第二项的角不一样.此时自然应该用二倍角公式把角变为 $\alpha+\beta$,$\alpha-\beta$,然后才可能合并同类项!

证法 2　左边 $=\frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2}+\frac{1+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1+\frac{1}{2}[\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)]-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1+$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha\cos 2\beta=$$

$$1=\text{右边}$$

例 20 证明:表达式 $y=\cos^2 x+\cos^2(x+\alpha)-2\cos\alpha\cos x\cos(x+\alpha)$ 与 x 无关.

思考方法 此题并不是等式证明,是一个性质证明题.使用例 19 的思想方法是不难给予证明的.表达式中三项都含有 x,若将第一项、第二项化积,那么含 x 的项就变为只有两项了.

$$y=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}[1+\cos 2(x+\alpha)]-$$

$$2\cos\alpha\cos x\cos(x+\alpha)=1+\frac{1}{2}[\cos 2x+$$

$$\cos 2(x+\alpha)]-2\cos\alpha\cos x\cos(x+\alpha)=$$

$$1+\cos(2x+\alpha)\cos\alpha-2\cos\alpha\cos x\cos(x+\alpha)$$

现在第二项、第三项中还有 x,要使 x 消失,必须合并第二项、第三项,它们都有 $\cos\alpha$ 这个因式,提取后括号内剩下的是

$$p=\cos(2x+\alpha)-2\cos x\cos(x+\alpha) \tag{6}$$

若将将式(6)后一项化和得

$$p=\cos(2x+\alpha)-[\cos(2x+\alpha)+\cos\alpha]=-\cos\alpha \tag{7}$$

若将式(7)前面一项用和角公式按 $x+\alpha,\alpha$ 拆开得

$$p=\cos x\cos(x+\alpha)-\sin x\sin(x+\alpha)-$$

$$2\cos x\cos(x+\alpha)=$$

$$-[\cos(x+\alpha)\cos x+\sin(x+\alpha)\sin x]=$$

$$-\cos[(x+\alpha)-x]=-\cos\alpha \tag{8}$$

总之所得的结果 $-\cos\alpha$ 都是与 x 无关的.由此得如下证明.

证明　$y=1+\cos(2x+\alpha)\cos\alpha-2\cos\alpha\cos x\cos(x+\alpha)=1+\cos\alpha[\cos(2x+\alpha)-2\cos x\cos(x+\alpha)]=1+\cos\alpha(-\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

故表达式 y 与 x 无关.

练习题

1. $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. $1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\dfrac{\cos x}{\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\sin x$.

4. $\dfrac{\cos 2\theta+\cos 2\varphi}{1+\cos 2(\theta+\varphi)}=\dfrac{\cos(\theta-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)}$.

5. $\cos 4\theta-4\cos 2\theta+3=8\sin^4\theta$.

6. $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\cos 2B}{\cos^2 A-\cos^2 B}$.

7. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}-\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}=-2\tan 2\theta$.

8. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

9. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

10. $\dfrac{2\sin\theta-\sin 2\theta}{2\sin\theta+\sin 2\theta}=\tan^2\dfrac{\theta}{2}$.

11. $\sin x\tan^2 x+\csc x\sec^2 x-2\tan x\sec x=\csc x-\sin x$.

12. $\sin^2 x\tan^2 x+\cos^2 x\cot^2 x=\tan^2 x+\cot^2 x-1$.

13. $3\sin 4x=4\cos^3 x\sin 3x+4\sin^3 x\cos 3x$.

14. $\dfrac{\sin x-\sin nx+\sin(2n-1)x}{\cos x-\cos nx+\cos(2n-1)x}=\tan nx$.

15. $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin^2(x+y)-2\sin x\sin y\cos(x+y)$.

16. $\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)-\sin\beta\sin(\beta+2\alpha)=\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)$.

17. $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^2\alpha=\cos^3 2\alpha$.

18. $2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\sec\theta+\cos^3\theta\csc\theta=\tan\theta+\cot\theta$.

19. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$.

20. $\dfrac{1}{1+2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}+\dfrac{1}{1+2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{1}{2\cos\theta-1}$.

21. $\cos^2(\alpha-3\beta)+\cos^2 3\beta-2\cos(\alpha-3\beta)\cos\alpha\cdot\cos 3\beta=\sin^2\alpha$.

22. $\tan\alpha+\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)=3\tan 3\alpha$.

23. $\dfrac{1-2\sin^2 x}{1-2\sin x\cos x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$.

三角恒等式的证明Ⅱ

第4章

三角恒等式中有如下一类等式

$$\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{2^4}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ$$

等.这些等式与前面几章所讨论的等式的不同之处是这些等式中的角都不是文字，而是数字.虽然这些等式的证明的思考方法仍然应该从角、函数、运算这三个方面的异同去考虑，但由于是数字角，故每个题的证法又与角的数字的特殊性有关.这样，有些题的难度就超过了一般的文字题.

例 1 求证

$$\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{2^4}$$

思考方法 从运算上看，左边是积，右边是商.从角来看，左边的角是$\frac{2\pi}{15}$，$\frac{4\pi}{15}$，$\frac{8\pi}{15}$，$\frac{14\pi}{15}$，而右边是常数$\frac{1}{2^4}$.而$\frac{1}{2^4}$是一个有理数，

若我们用诱导公式可得 $\cos\frac{14\pi}{15}=\cos\left(2\pi-\frac{14\pi}{15}\right)=\cos\frac{16\pi}{15}$，这样$\frac{2\pi}{15}$，$\frac{4\pi}{15}$，$\frac{8\pi}{15}$，$\frac{16\pi}{15}$，正是以 2 为公比的等比数列. 在代数中，求积的一个常用方法是将每个因式化为商的形式，然后约简. 假如我们能够做到 $a_k=\frac{b_{k+1}}{b_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$a_1a_2\cdots a_n=\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\cdots\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_{n+1}}{b_1}$$

而正弦的二倍角公式 $\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$正好可以帮助我们将所求证的等式的左边的四项都变为商的形式. 由于四个角恰为以 2 为公比的等比数列. 故化为商的形式后，恰能前后分子与分母相约，从而达到证明的目的.

证明 左边$=\frac{\sin\frac{4\pi}{15}}{2\sin\frac{2\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{15}}{2\sin\frac{4\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\frac{32\pi}{15}}{2\sin\frac{16\pi}{15}}=\frac{\sin\frac{32\pi}{15}}{2^4\sin\frac{2\pi}{15}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{15}}{2^4\sin\frac{2\pi}{15}}=\frac{1}{2^4}=$右边

例 2 求证：$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{4}$.

思考方法 与例 1 一样，从运算入手，将左边变为商的形式，由于右边分母为 4，左边是两项之积，故仍用正弦二倍角公式得

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}}\cdot\frac{\sin\frac{26\pi}{10}}{2\cos\frac{13\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{13\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{13\pi}{10}}$$

我们见到分母中的 4 已经出现，对照等式右边是 $-\frac{1}{4}$，故有理由相信分子 $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{13\pi}{5}$ 与分母中的 $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{13\pi}{10}$ 能够约简. 要约简，首先要统一函数，然后统一角，而诱导公式正好可以帮助我们达到这两个转化目的.

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{4\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$\cos\frac{13\pi}{10}=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{13\pi}{10}\right)=-\sin\frac{2\pi}{10}=-\sin\frac{\pi}{5}$$

$$\sin\frac{13\pi}{5}=\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$$

当分子与分母的角的差异、函数的差异消失了的时候，分式就自然可以达到约简的目的了.

证法 1　左边 $=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{13\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{13\pi}{10}}=$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{5}\right)}=$$

$$-\frac{1}{4}=\text{右边}$$

比较例 1 与例 2 的证明，我们发现，例 1 的等式左边都是余弦函数. 用正弦二倍角公式变为商，恰是同名函数正弦的商. 这样例 1 的左边全化为商时，分子、分

母的函数没有差异,所以约分比较顺利.而例2左边是正弦积,用正弦二倍角公式变为商是异名函数正弦与余弦的商.这就给约分带来一点麻烦.诱导公式解除了我们的问题,最后达到约简之目的.如果对例2一开始就用诱导公式变为余弦的积,而且尽量使乘积中的两个角,一个是另一个的二倍,这样又得到如下证法.

证法2 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}=-\cos\frac{4\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}=$

$$-\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=$$

$$-\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$-\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$-\frac{1}{4}=\text{右边}$$

例3 求证

$$\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ$$

思考方法 等式左边的角与右边的角不一样,但比较突出的差异是左边是和,右边是积,故应该采用和差化积,由于右边的角是7°,故和差化积时如何配组必须根据和差化积公式给予适当的选择.因为$\frac{61^\circ-47^\circ}{2}=7^\circ$,$\frac{25^\circ-^\circ 11^\circ}{2}=7^\circ$.故第一项、第二项应为一组,第三项、第四项另为一组分别和差化积,这样做可以同时缩小角的差异.

$$左边=2\sin 54^\circ\sin 7^\circ-2\sin 18^\circ\sin 7^\circ=$$
$$2\sin 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)$$

由此要证原等式，只需证明 $2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=1$ 即可，也就是要证明 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\sin 54^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，那么 $\sin 54^\circ-\sin 18^\circ=\frac{1}{2}$ 就立即获得证明了. 若这些数据，我们经常试用和化积或积化和，将一些数字角化为 30°，45°，60° 这样一些特殊角，然后求出数据. 但是 $\sin 54^\circ-\sin 18^\circ=2\cos 36^\circ\sin 18^\circ$，化积后的角是 18°，36°，并没有化为特殊角 30°，45°，60°，我们仍然没能得到我们所需要的数值 $\frac{1}{2}$. 而 36° 恰好是 18° 的 2 倍，例 1、例 2 已提供了一个求积的方法. 由此问题获得了解决的途经.

证明　$左边=2\sin 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=$

$$4\sin 7^\circ\cos 36^\circ\sin 18^\circ=$$
$$4\sin 7^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ=$$
$$4\sin 7^\circ\cdot\frac{\sin 72^\circ}{2\sin 36^\circ}\cdot\frac{\sin 144^\circ}{2\sin 72^\circ}=$$
$$4\sin 7^\circ\cdot\frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=$$
$$\sin 7^\circ\cdot\frac{\sin(180^\circ-36^\circ)}{\sin 36^\circ}=\sin 7^\circ=$$
$$右边$$

例 4　求证：$\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\frac{3}{4}$.

思考方法　左边的角是 10°，40°，右边是常数 $\frac{3}{4}$；左边是和，右边是积. 由运算入手，对左边进行和化积. 首先对第一项、第二项降幂变为一次，然后化积可得

$$左边=\frac{1}{2}(1-\cos 20^\circ)+\frac{1}{2}(1+\cos 80^\circ)+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=1+\frac{1}{2}(\cos 80^\circ-\cos 20^\circ)+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=1-\sin 50^\circ\sin 30^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$$

第二项、第三项并没有相消. 50°不是特殊角，30°，45°，60°期望与第三项合并后可以消去. 若把第三项积化和，即可出现 $10^\circ+40^\circ=50^\circ$的角，而 $40^\circ-10^\circ=30^\circ$又是特殊角. 问题的解决已经是明显的了.

证明 左边$=1-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=$

$$1-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{2}(\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)=$$

$$1-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{2}\sin 50^\circ-\frac{1}{2}\sin 30^\circ=$$

$$1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

从例 4 的证明中，我们看到了和化积、积化和在三角证明题中的作用. 它们是解题的“有力杠杆”. 对等式左边的第一项、第二项进行和化积，而对第三项进行积化和，都将 10°及 40°转化为 30°与 50°的角. 前者 30°是特殊角，函数值即可得到，而后者不是特殊角. 但毕竟使第一项、第二项与第三项找到了共同点. 这样就便于合并同类项，简化问题，最终达到等式的证明.

例 5 求证：$\frac{1}{\cos 80^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}=4$.

思考方法 左边是差，右边是积. 从运算入手，通分，将分式化积. 因右边是整式，故应约分，使分子、分母角一致，函数一致，即可达到证明的目的.

证明 左边$=\frac{\sin 80^\circ-\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ\sin 80^\circ}=$

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin 80^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ\right)}{\cos 80^\circ\sin 80^\circ}=$$

$$\frac{2(\sin 80^\circ\cos 60^\circ-\cos 80^\circ\sin 60^\circ)}{\cos 80^\circ\sin 80^\circ}=$$

$$\frac{2\sin(80^\circ-60^\circ)}{\cos 80^\circ\sin 80^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ\sin 80^\circ}=$$

$$\frac{4\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=4=\text{右边}$$

例 6　求证：$\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1$.

思考方法　左边是积，右边是常数. 与例 1、例 2 一样，将左边化为正余弦之比，并利用诱导公式、倍角公式等，尽量将分子分母约简，得

$$\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=$$

$$\frac{\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ}{\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ}=$$

$$\frac{\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ}{\sin 84^\circ\sin 48^\circ\sin 24^\circ\sin 12^\circ}=$$

$$\frac{\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ}{2^4\sin 42^\circ\cos 42^\circ\sin 24^\circ\cos 24^\circ\sin 12^\circ\cos 12^\circ\sin 6^\circ\cos 6^\circ}=$$

$$\frac{1}{2^4\cos 6^\circ\cos 42^\circ\sin 24^\circ\sin 12^\circ}=$$

$$\frac{1}{2^4\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ}$$

这样原来的命题转化为证明

$$2^4\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ=1$$

如果模仿例 1，用商的形式表示左边的积，则有

$$2^4\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ=\frac{\sin 12^\circ\sin 84^\circ\sin 132^\circ\sin 156^\circ}{\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ}$$

尽管分子分母的函数都是正弦，但由于 6°，42°，66°，78°并不是二倍关系，故分子分母并不能直接约

简.若要保持分子分母函数一致(这是约分的必要条件)而用诱导公式去改变角,可能又会回到原来的求证等式上去,这就产生了恶性循环.由此必须另找途径.既然将积变为积商之路没走通,故另一条路就是积化和,走例4提供之路.如何将积化和?原则是积化和后,最好能出现一些特殊角,如$30°$,$45°$,$60°$之类.我们见到$66°-6°=60°$,$42°+78°=120°$均为特殊角,从而将$\cos 6°$与$\cos 66°$分为一组,$\cos 42°$与$\cos 78°$分为一组,从而有

$$\begin{aligned}
&2^4\cos 6°\cos 42°\cos 66°\cos 78°=\\
&4(2\cos 6°\cos 66°)(2\cos 42°\cos 78°)=\\
&4(\cos 72°+\cos 60°)(\cos 120°+\cos 36°)=\\
&4\left(\cos 72°+\frac{1}{2}\right)\left(\cos 36°-\frac{1}{2}\right)=\\
&4\cos 72°\cos 36°+2(\cos 36°-\cos 72°)-1=\\
&4\cos 72°\cos 36°+4\sin 54°\sin 18°-1=\\
&4\cos 72°\cos 36°+4\cos 36°\cos 72°-1=\\
&8\cos 72°\cos 36°-1
\end{aligned}$$

这已经是我们熟悉的了.

证明 左边$=\dfrac{1}{2^4\cos 6°\cos 42°\cos 66°\cos 78°}=$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\cos 36°\cos 72°-1}=\\
&\left(8\cdot\frac{\sin 72°}{2\sin 36°}\cdot\frac{\sin 144°}{2\sin 72°}-1\right)^{-1}=\\
&(2-1)^{-1}=1^{-1}=1=\text{右边}
\end{aligned}$$

例7 求证:$\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

思考方法 左边是和,右边是积.我们从运算入手,将左边和化积.

$$\begin{aligned}左边&=2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\\&2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\cos^2\frac{3\pi}{7}-1=\\&2\cos\frac{3\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)-1=\\&4\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-1=\\&-4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}-1\end{aligned}$$

而这最后的表达式中有三个余弦的积，而且$\frac{\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{7}$，$\frac{4\pi}{7}$恰又是二倍关系，故可用正弦二倍角公式化为商约简即可达到证明之目的.

对本例我们再提供另一种证明方法. 在代数中，若有 n 个数求和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

假若我们能找到这样一串数 $b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$，使 $a_1=b_2-b_1,a_2=b_3-b_2,\cdots,a_k=b_{k+1}-b_k,\cdots,a_n=b_{n+1}-b_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$，从而达到求和之目的. 基于这种思想，对本例，我们想能否做到使 $\cos\frac{2\pi}{7}=b_2-b_1$，$\cos\frac{4\pi}{7}=b_3-b_2$，$\cos\frac{6\pi}{7}=b_4-b_3$？从运算上分析，将 $\cos\frac{2\pi}{7}$变为 b_2-b_1 的过程实质上是积化差的过程. 回忆积化差的公式有

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)]$$

故

$$\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}-\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$$

注意,上述公式右边的分子的两个角之差是 2α,正是分母的角 α 的二倍,而所求证的等式左边的角是 $\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7}$,正好成一个等差数列,故当选择 $\alpha=\frac{\pi}{7}$ 时,我们有

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\sin\left(\frac{6\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{6\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

将它们代入所求证等式的左边,即可达到目的.

证法 1　左边 $=-4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}-1=$

$$-4\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{4\pi}{7}}-1=$$

$$-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-1=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-1=$$

$$\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}=\text{右边}$$

证法 2　左边 $=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}\left(\sin\dfrac{3\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{5\pi}{7}-\right.$

$$\left.\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(0-\sin\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2}=$$

右边

以上 7 个例子提供的对于含数字角的三角等式的证明，我们归纳解题思路如下：从角的差异（数字角与数字角、数字角与特殊角的差别）或从运算出发，利用和化积，积化和，积变为积商，和变为和差（例 7 证法 2）的方法，最后达到化简，证出等式．这些手法，读者应仔细琢磨，加以领会．一般遇到这样的一些数字角的证明题，这里提供的方法往往是有效的．下面提供的用解方程或方程组的方法来证明等式，同样是一类典型方法，应加以记取．

例 8　求证：$\tan 7°30'=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$．

思考方法　$7°30'$不是特殊角，但 $7°30'=\dfrac{1}{2}\times 15°=\dfrac{1}{4}\times 30°$．由此我们可以用二倍角公式，视 $\tan 15°$ 及 $\tan 7°30'$先后为未知数，解方程求得其值．

证明　因为

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{1}$$

设 $\tan\alpha=x$，$\tan 2\alpha=a$．则等式(1)可变为一个一

元二次方程

$$ax^2+2x-a=0 \tag{2}$$

当 $\alpha=15^\circ$时，$\tan 2\alpha=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则 $x=\tan 15^\circ$ 满足方程

$$x^2+2\sqrt{3}x-1=0 \tag{3}$$

解之得

$$x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1}=-\sqrt{3}\pm 2$$

因为 $x=\tan 15^\circ>0$，故 $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$.

现求 $\tan 7^\circ 30'$. 令 $\alpha=7^\circ 30'$，则 $a=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，方程(2)变为

$$x^2+2(2+\sqrt{3})x-1=0 \tag{4}$$

解之得

$$\begin{aligned}x=&-(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}=\\&-(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\\&-(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{2}\times\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\\&-(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\\&-(2+\sqrt{3})\pm(\sqrt{6}+\sqrt{2})\end{aligned} \tag{5}$$

因为 $\tan 7^\circ 30'>0$，故 $\tan 7^\circ 30'=\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2$. 为了获得要证之结论，只需将式(5)右边分组分解即可

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2=&(\sqrt{2}-2)+(\sqrt{6}-\sqrt{3})=\\&\sqrt{2}(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)=\\&(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

至此完成了我们的证明. 当然，这个题不用解方程

也可求得 $\tan 7°30'$. 事实上,已知 $30°$ 的函数值,而 $7°30'=\frac{1}{4}\times 30°$,故我们只需用半角公式帮助我们进行角的转化,建立 $7°30'$ 与特殊角 $30°$ 之间的联系即可证出等式.

因为

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

同理

$$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

再由正切半角公式可得

$$\tan 7°30'=\frac{1-\cos 15°}{\sin 15°}=\frac{4-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$$

$$\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}=$$

$$\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(8+4\sqrt{3})}{4}=$$

$$\sqrt{6}+\sqrt{2}-2-\sqrt{3}=$$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

在这里,在正切的半角公式中,我们没有使用下面的公式

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

这是为了避免多重根式的运算.

练习题

证明下列等式：

1. $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

2. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

3. $\sin 87°-\sin 59°-\sin 93°+\sin 61°=\sin 1°$.

4. $\cos 10°+\cos 82°+\cos 154°+\cos 226°+\cos 298°=0$.

5. $\cos 55°\cos 65°+\cos 65°\cos 175°+\cos 55°\cos 175°=-\frac{3}{4}$.

6. $\sin 6°\sin 42°\sin 66°\sin 78°=\frac{1}{16}$.

7. $\tan 67°30'-\tan 22°30'=2$.

8. $\tan 10°\tan 50°\tan 70°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

10. $\tan 22°30'=\sqrt{2}-1$.

11. $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

三角条件等式的证明Ⅰ

第5章

前面我们介绍了三角恒等式的证明的思路.归纳起来,就是找差异(角、函数、运算的差异),抓联系(分析哪些公式可以将这些差异联系起来),促转化(选择恰当的公式,促使差异转化),求统一(最终达到差异的消灭).这种思路对于条件等式的证明同样是有效的.但是条件等式又有其本身的特殊性.这里关键是如何认识和使用条件.证明条件等式时,可将条件式代入求证式的一边变形而得到另一边;也可以由条件式做等式的变形得出求证式.而在具体的条件等式的证明中,不但要考虑求证式左边与右边的角、函数以及运算的差异,而且要考虑条件式与求证式之间的角、函数以及运算的差异.当差异找清楚了,运用我们在第 3 章、第 4 章中所介绍的证明思想方法,问题就容易解决了.

例 1　已知　$A+B+C=\pi$.求证

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

思考方法　求证式的左边是单角 A,

B,C,而右边是半角$\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}$;从函数来看,左边是正弦,右边是余弦;从运算看,左边是和,右边是积.若我们从运算入手,我们见到右边的因式有 $\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2}$,$\cos\frac{C}{2}$.用代数的观点看,$\sin A,\sin B,\sin C$ 都应能分解出这些因式来.不失一般性,我们来看 $\sin A+\sin B+\sin C$ 怎么能提出公因式 $\cos\frac{C}{2}$.据二倍角公式

$$\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

它确实有 $\cos\frac{C}{2}$.由此我们想 $\sin A+\sin B$ 也必须有 $\cos\frac{C}{2}$的因式.将 $\sin A+\sin B$ 和化积得

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

右边的两个因式都是 A,B 的函数 $\sin\frac{A+B}{2}$,$\cos\frac{A-B}{2}$.根据我们的分析,其中必有一个是 $\cos\frac{C}{2}$.此时注意到条件 $A+B+C=\pi$,故 $A+B=\pi-C$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

可将 A,B 转化为 C.再借助于诱导公式,即得

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$$

从而求证式的左边可化为

$$左边=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

$$2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

达到提出公因式 $\cos\dfrac{C}{2}$的目的. 再将它与求证式的右边

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

比较，我们只需证明

$$\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

即可. 从运算来看，左边是和，右边是积；从角来看，左边有 C，右边没有 C ，故我们的措施应该是和化积，并且消灭 C. 在此可用条件 $C=\pi-(A+B)$，故

$$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}$$

将其先代入左边消灭 C 后化积. 我们完全可期望即得我们所求的结论.

证明　左边 $=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=$

$$2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)=$$

$$2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

右边

上述证明中，我们的着眼点在运算上，也就是用力地想把左边和化积. 为了提出公因式 $\cos\dfrac{C}{2}$，在第二步我们利用条件等式 $A+B+C=\pi$，将$\dfrac{A+B}{2}$转化为$\dfrac{C}{2}$，

达到提出 $\cos\dfrac{C}{2}$的目的.当这个目的达到后，所剩的因式应是

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

其与 C 无关了，从而我们又用条件将$\dfrac{C}{2}$转化为$\dfrac{A+B}{2}$.这一正一反的转化，都是为了使左边能转化为右边.读者仔细琢磨这种思维过程中的辨证关系.

例 2　在$\triangle ABC$ 中，A,B,C 表示其三个内角.求证

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

思考方法　左边对于

$$\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}$$

而言是平方和，而右边是积.故我们仍从和化积入手.因为和化积的公式都是一次的，故首先应将左边的二次降为一次，即得

$$左边=\frac{1}{2}(1-\cos A)+\frac{1}{2}(1-\cos B)+\frac{1}{2}(1-\cos C)=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

现剩下的就是将 $\cos A+\cos B+\cos C$ 化为积的形式即可，而其思想方法与例 1 相同.

证明　$左边=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=\dfrac{3}{2}-$

$$\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)=$$

$$1-\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)=$$

$$1-\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$1-\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=$$

$$1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

右边

例 3　已知 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$. 求证：$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$.

思考方法　左边是和，右边是积. 从运算入手，将左边和化积. 前两项一组，后两项一组，分别化积后得

$$左边=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$

将其与求证式右边比较，我们知道

$$2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$

中必有因式 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. 为此利用条件式 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$，将$\frac{\gamma+\delta}{2}$转化为$\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\frac{\gamma+\delta}{2}=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$$

从而

$$\cos\frac{\gamma+\delta}{2}=-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

因此有

$$左边=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

与求证式右边比较，即要证

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=-2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$$

其主要差异还是左边是差,右边是积.将差化为积得

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=$$

$$-2\sin\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\delta)}{4}\sin\frac{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}{4}$$

与求证式右边比较,剩下的差异有角的差异.应将

$$\frac{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}{4},\frac{(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)}{4}$$

分别化为$\frac{\alpha+\gamma}{2},\frac{\alpha+\delta}{2}$.此时,再利用条件

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$$

得

$$\beta+\gamma=2\pi-(\alpha+\delta),\beta+\delta=2\pi-(\alpha+\gamma)$$

从而

$$\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\delta)}{4}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$\frac{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}{4}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\delta}{2}$$

由此

$$\sin\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\delta)}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\delta}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$$

至此角、函数的差异全部消失.

证明 左边$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)=$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-2\sin\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\delta)}{4}\sin\frac{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}{4}\right)=$$

$$-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\left(-\cos\frac{\alpha+\delta}{2}\right)=$$

$$-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}=$$

右边

例 4　若 $\alpha+\beta+\gamma=0$，求证：$2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\cdot(1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$.

思考方法　左边的角是 α,β,γ，右边的角是 $2\alpha,2\beta,2\gamma$. 由此我们想到应该用正弦二倍角公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. 从运算看，左边是积，右边是和. 若将左边括号乘开，我们可以得出 12 项，而其中有些项恰是 $2\sin\alpha\cos\alpha,2\sin\beta\cos\beta,2\sin\gamma\cos\gamma$，它们之和正好等于右边三项之和. 我们猜想左边乘开后所剩下的 9 项之和应该为零

$$\begin{aligned}\text{左边}=&\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+\\&2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha+\\&\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\beta)\end{aligned}$$

为了证明求证式的左边等于右边，我们只需证

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cos\gamma+\\&\quad\sin\beta\cos\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha+\\&\quad\sin\gamma\cos\beta=0\end{aligned}$$

即可. 这 9 项形式上看都是“正”的，其实当我们注意到条件 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 便知，其中必须有负角. 为了证这 9 项的代数和为零，我们相信其中有些项可转化为同类项，然后合并为零. 我们看到等式中的第 4 项与第 6 项，第 5 项与第 8 项，第 7 项与第 9 项之和乃分别是 $\sin(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\gamma),\sin(\beta+\gamma)$的和角公式的展开式，又借助于条件 $\alpha+\beta+\gamma=0$，可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(-\gamma)=-\sin\gamma$$

$$\sin(\alpha+\gamma)=\sin(-\beta)=-\sin\beta$$
$$\sin(\beta+\gamma)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

而这正是前 3 项的相反数，从而证明了我们所需证明的等式.

证明 左边$=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\beta+2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+2[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\beta+\gamma)]=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+2(-\sin\gamma-\sin\beta-\sin\alpha)=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=$右边

例 5 设 $A+B+C=\pi$，求证

$$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

思考方法 左边是立方和，右边是

$$\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}$$

的积，以及

$$\cos\frac{3A}{2},\cos\frac{3B}{2},\cos\frac{3C}{2}$$

的积. 我们自然想到将左边和化积，而首先应该将立方和降幂为一次的. 求证式中的 3(次数、系数、角的倍数

均有 3)启发我们考虑三倍角公式

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

得

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$$

由此

$$\text{左边}=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)-\frac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C)$$

例 1 的结论和思考方法分别应用于第一个括号和第二个括号,将它们化积,即得我们的求证式.

证明　$\text{左边}=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)-\frac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C)=$

$$3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{4}\left[2\sin\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}\right]=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3(A-B)}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3(A+B)}{2}\right)\cos\frac{3C}{2}\right]=$$

$$3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\left[-\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}-\right.$$

$$\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3C}{2}\Big]=$$

$$3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{3C}{2}\Big[\cos\frac{3(A-B)}{2}+$$

$$\cos\frac{3(A+B)}{2}\Big]=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{3C}{2}\cdot 2\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}=$$

$$3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+$$

$$\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=$$

右边

例 6 已知 $\sin^2\alpha\csc^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\gamma=1$，求证

$$\sin^2\gamma=\tan^2\alpha\cot^2\beta \tag{1}$$

思考方法 条件式与求证式的角都是单角 α,β,γ. 从函数上看，条件式中 γ 的函数是余弦，求证式中是正弦，条件式中 α 的函数是正余弦，而求证式中 α 的函数是正切，β 在条件式中的函数是余割，而求证式中是余切；从运算上看，条件式与求证式也不一样. 条件式是 α,β 和 γ 的函数隐式. 而求证式是要用 α,β 的函数的显式表达 γ 的正弦平方. 故本题可从 γ 的函数入手，先用 $\cos^2\gamma=1-\sin^2\gamma$ 把条件式中的 γ 的余弦转化为正弦，然后从运算下手，解出 $\sin^2\gamma$，让其用 α,β 的函数表达

$$\sin^2\alpha\csc^2\beta+\cos^2\alpha(1-\sin^2\gamma)=1 \tag{2}$$

$$\sin^2\alpha\csc^2\beta+\cos^2\alpha-1=\cos^2\alpha\sin^2\gamma \tag{3}$$

所以

$$\sin^2\gamma=\frac{\sin^2\alpha\csc^2\beta+\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} \tag{4}$$

现在的问题只需将式(4)右边变为 $\tan^2\alpha\cot^2\beta$ 即可. 为了获得 $\tan^2\alpha$ 这个因式,我们看到式(4)右边第一项含 $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$,故余下的项 $\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}$ 也应能提出 $\tan^2\alpha$,事实上

$$\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=\frac{-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-\tan^2\alpha$$

剩下将 $\cos^2\beta$ 转化为 $\cot^2\beta$,只需利用同角关系即可.

证明　由条件式可得

$$\begin{aligned}\sin^2\gamma=&\frac{\sin^2\alpha\csc^2\beta+\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=\\&\tan^2\alpha\csc^2\beta-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha\csc^2\beta-\tan^2\alpha=\\&\tan^2\alpha(\csc^2\beta-1)=\tan^2\alpha\cot^2\beta=\\&\text{右边}\end{aligned}$$

例 7　已知 $a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$,求证

$$\tan\theta=\frac{b\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b\cos\beta} \tag{5}$$

思考方法　条件式与求证式的角的差异是和角与单角的差异. 条件式采用和角公式得

$$a\sin\theta\cos\alpha+a\cos\theta\sin\alpha=b\sin\theta\cos\beta+b\cos\theta\sin\beta \tag{6}$$

这个等式与求证式还存在函数的差异. 求证式中有 $\tan\theta$,而上述等式中含的是 $\sin\theta$, $\cos\theta$. 此时用同角三角函数关系,两边除以 $\cos\theta$,就可将式(6)变为只含 $\tan\theta$ 的等式

$$a\tan\theta\cos\alpha+a\sin\alpha=b\tan\theta\cos\beta+b\sin\beta$$

此时,与求证式的差异仅在于运算的差异,只需解出 $\tan\theta$ 即可.

证明 因为

$$a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$$

所以

$$a\sin\theta\cos\alpha+a\cos\theta\sin\alpha=b\sin\theta\cos\beta+b\cos\theta\sin\beta$$

于是

$$a\tan\theta\cos\alpha+a\sin\alpha=b\tan\theta\cos\beta+b\sin\beta$$

所以

$$\tan\theta(a\cos\alpha-b\cos\beta)=b\sin\beta-a\sin\alpha$$

故

$$\tan\theta=\frac{b\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b\cos\beta}$$

例 8 设 $A+B+C=\pi$，$\sin A=\cos B\cos C$，求证：$\tan B+\tan C=1$.

思考方法 条件式 $\sin A=\cos B\cos C$ 中有 A，求证式

$$\tan B+\tan C=1$$

中没有 A，故可从 $A+B+C=\pi$ 中解出 $A=\pi-(B+C)$ 代入条件式，消灭条件式和结论式中角的差异，得

$$\sin(B+C)=\cos B\cos C$$

此式中角有 $B+C$，而求证式是 B，C 的单角. 故再用和角公式化 $B+C$ 为单角. 至此，角的差异彻底消失，剩下的是函数的差异和运算上的差异，用同角三角函数关系，期望即可达到求证式.

证明 因为

$$A=\pi-(B+C),\sin A=\cos B\cos C$$

所以

$$\sin(B+C)=\cos B\cos C$$

于是

$$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\cos B\cos C$$

两边除以 $\cos B\cos C$ 即得 $\tan B+\tan C=1$.

例 9　已知 $a\tan\alpha=b\tan\beta, a^2x^2=a^2-b^2$，求证：$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$.

思考方法　条件式与求证式中的角都是单角 α，β，并没有差异. 条件式中 α，β 的函数是正切，而求证式 α 的函数是余弦平方，β 的函数是正弦平方. 条件式中有 a^2，b^2，a，b. 但求证式中没有 a，b. 从这个字母的差异出发，我们可以在两个条件式中，消去 a，b，得到只含 α，β，x 的等式，再将正切分别变为正弦和余弦. 最后只剩下运算的差异，因式分解，即可望到求证式.

证明　因为 $a^2x^2=a^2-b^2$，所以 $x^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$.

又因为

$$\frac{b}{a}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \tag{7}$$

故

$$x^2=1-\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta} \tag{8}$$

即

$$x^2=1-\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta} \tag{9}$$

$$x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta \tag{10}$$

注意到求证式中 α 只有余弦. β 只有正弦，故应转化 $\sin\alpha$ 为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为 $\sin\beta$

$$x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\sin^2\beta-(1-\cos^2\alpha)(1-\sin^2\beta) \tag{11}$$

$$x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=-1+\cos^2\alpha+\sin^2\beta \tag{12}$$

注意到求证式左边乘开时，x 的最高次是 4 次，故式(12)两边乘 x^2 得

$$x^4\cos^2\alpha\sin^2\beta=-x^2+x^2\cos^2\alpha+x^2\sin^2\beta$$

两边加 1,并移项得

$$1-x^2\cos^2\alpha-x^2\sin^2\beta+x^4\cos^2\alpha\sin^2\beta=1-x^2$$

即得

$$(1-x^2\cos^2\alpha)(1-x^2\sin^2\beta)=1-x^2$$

例 10 已知

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\alpha)}{b}=\frac{\cos(x+2\alpha)}{c}=\frac{\cos(x+3\alpha)}{d}$$

求证:$\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$.

思考方法 条件式与求证式呈现比例的形式,自然想到比例的性质与定理.从角来看,条件式中有 x 与 α,而求证式中无 x 与 α,故应消去 x 与 α.求证式中出现 $a+c$ 与 $b+d$,由此启发我们用等比定律(如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$,那么$\dfrac{a+c}{b+d}=k$),由条件式创造出 $a+c$ 与 $b+d$,由此有以下证明.

证明 由等比定律

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\alpha)}{b}=\frac{\cos(x+2\alpha)}{c}=\frac{\cos(x+3\alpha)}{d}=\frac{\cos x+\cos(x+2\alpha)}{a+c}=\frac{\cos(x+\alpha)+\cos(x+3\alpha)}{b+d}\tag{13}$$

得

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos x+\cos(x+2\alpha)}{\cos(x+\alpha)}\tag{14}$$

$$\frac{b+d}{c}=\frac{\cos(x+\alpha)+\cos(x+3\alpha)}{\cos(x+2\alpha)}\tag{15}$$

要证求证式,只需证式(14),(15)右边相等即可,分母

不一样，理应通分，但明显这两个分子化积后，可与分母约简，由此先约简得

$$\frac{a+c}{b}=\frac{2\cos(x+\alpha)\cos\alpha}{\cos(x+\alpha)}=2\cos\alpha$$

$$\frac{b+d}{c}=\frac{2\cos(x+2\alpha)\cos\alpha}{\cos(x+2\alpha)}=2\cos\alpha$$

由此即得

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$$

例 11　已知 $\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$，求证：$2\sin 2\beta-\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta)$.

思考方法　求证式的角正是条件式中的二倍. 从函数看，条件式是正切，求证式是正弦. 从函数入手，先将条件式变为正余弦得

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

若将右边移一个 $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ 到左边，则左边恰可用差角公式化简，得

$$\sin\beta=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

拿它与求证式比较. 从角出发，为了得到 2β，两边乘以 $2\cos\beta$，借助于正弦倍角公式可得

$$\sin 2\beta=4\sin\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

求证式中有三项，而上述等式只有两项，故从运算出发，对右边积化和拆出两项来

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

这里出现的 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\cos(\alpha+\beta)$ 的积正可导致二倍角 $2\alpha+2\beta$ 的产生，故条件式又可变为

$$\begin{aligned}\sin 2\beta=&2[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=\\&2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\\&\sin(2\alpha+2\beta)+2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

而最后一项 $2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ 若也化为和的话，正可出现二倍角 $2\alpha,2\beta$. 从而有如下证明.

证明 由条件式可得

$$\sin\beta=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

两边乘以 $2\cos\beta$ 得

$$\sin 2\beta=4\sin\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

所以

$$\sin 2\beta=2[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin 2\beta=\sin(2\alpha+2\beta)+2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin 2\beta=\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha-\sin 2\beta$$

移项即得

$$2\sin 2\beta-\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+\beta)$$

例 12 已知 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

思考方法 条件式中的角是 β 与 $2\alpha+\beta$，而求证式中的角是 $\alpha+\beta$ 与 α. 我们从角入手，因为

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha,2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$$

故由条件式得

$$3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$$

用和角与差角公式展开得

$$3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

合并同类项得

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

此时只需用同角三角函数的关系就可转化为求证式中的正切函数了.

证明 因为

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$$

所以

$$3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

所以

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

两边都除以 $2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$ 即得

$$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$$

例 13　已知 $a\sec x-c\tan x=d$，$b\sec x+d\tan x=c$，求证：$a^2+b^2=c^2+d^2$.

思考方法　条件式中有角 x，而求证式中无 x，又条件式中 a,b,c,d 均是一次的，而求证式中的 a,b,c,d 均是二次的. 故我们想到平方. 注意到求证式中，a,b 在一边；c,d 在另一边，而条件式 c,d 在等式两边. 故我们可将条件式左边的含 c,d 的项移到右边，然后平方相加即可.

证明　$a\sec x=c\tan x+d$，$b\sec x=c-d\tan x$

将两式均平方，然后相加得

$$(a^2+b^2)\sec^2x=(c\tan x+d)^2+(c-d\tan x)^2$$

即

$$(a^2+b^2)\sec^2x=c^2(\tan^2x+1)+d^2(1+\tan^2x)$$

$$(a^2+b^2)\sec^2x=(c^2+d^2)(\tan^2x+1)$$

因为

$$\sec^2x=\tan^2x+1\neq0$$

所以

$$a^2+b^2=c^2+d^2$$

例 14　设 a,b,c 为实数，$ab\neq0$，$\alpha\neq2k\pi+\beta(k\in\mathbf{R}_+)$，而且

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=c$$

$$a\sin\beta+b\cos\beta=c$$

求证：$\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

思考方法 条件式中的角是 α,β，求证式中的角是$\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，这就启发我们用和差化积的公式.另外求证式中出现 a^2+b^2，这就使我们想起先用和角公式将 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=c$ 的左边和化积，不就出现 $\sqrt{a^2+b^2}$ 了吗？由此有如下证明.

证明 由已知得

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)=c \tag{16}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\beta+\theta)=c \tag{17}$$

其中 $\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$.式(16)，(17)相加并和化积得

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2c \tag{18}$$

式(18)两边乘以$\dfrac{1}{2}$后边平方并除以 a^2+b^2，得

$$\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

与求证式相比较，我们还需证明

$$\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)=1$$

此等式中没有 a,b,c，特别是没有 c.但角是$\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\theta$，故我们想到将式(16)，(17)相减并化积，既可以达到消去 c，而且可以得到角$\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\theta$，由此得

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

因为　　　　$|a|+|b|\neq 0$，故 $a^2+b^2\neq 0$

因为

$$\alpha\neq 2k\pi+\beta(k\in J)$$

所以

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$$

由此

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)=0$$

因为

$$\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)=1$$

所以

$$\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)=1$$

这样，求证式获得证明.

例 15　已知 a,b,c 为实数，而且

$$\begin{matrix}a\sin\alpha+b\cos\alpha=c\\ a\sin\beta+b\cos\beta=c\end{matrix}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\neq k\pi,k\in J\right)$$

求证：$\dfrac{a}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{b}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

思考方法　分析与例 14 相同，为了得到角

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\text{ 与 }\frac{\alpha-\beta}{2}$$

应该和差化积.若先证求证式的第一个等号，此时求证式中没有 c.故应该将条件式相减，消去 c，然后化积即可达到目的.若证求证式的第二个等号，此时求证式中没有 a，应该将条件式中的左边第二项移到右边，然后两式相除，消去 α，整理后化积.

证明 先证

$$\frac{a}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

将两条件式相减得

$$a(\sin\alpha-\sin\beta)+b(\cos\alpha-\cos\beta)=0$$

将两括号化积得

$$a\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-b\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

即

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$$

因为

$$\frac{\alpha-\beta}{2}\neq k\pi$$

故

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$$

由此得

$$a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

即

$$\frac{a}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

再证

$$\frac{b}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

由条件式得

$$a\sin\alpha=c-b\cos\alpha$$

$$a\sin\beta=c-b\cos\beta$$

两式相除得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c-b\cos\alpha}{c-b\cos\beta}$$

整理后得

$$c(\sin\alpha-\sin\beta)=b(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$

两边都化积得

$$2c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=b\sin(\alpha-\beta)$$

即

$$2c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2b\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

因为

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$$

故

$$c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

所以

$$\frac{b}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

于是

$$\frac{a}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

例 16　已知 $\sin A+\sin B+\sin C=0$，$\cos A+\cos B+\cos C=0$.

求证：(1) $\cos(A-B)=\cos(B-C)=\cos(C-A)=-\frac{1}{2}$；(2) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ 为定值.

思考方法　先分析求证式(1)与条件式之间的异同.由于 A,B,C 的对称性,故只需证(1)中的 $\cos(A-B)=-\frac{1}{2}$ 即可.而此求证式中没有 C,条件式有 C,故只需消除 C 即可.因 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$,故将条件式中左边的 $\sin C$,$\cos C$ 都移到等式的右边,然后两边平方可得

$$\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B+\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B=1$$

即

$$2+2(\sin A\sin B+\cos A\cos B)=1$$

此式与求证式只有单角与差角之别,用差角公式即可.

再分析(2).要证明 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ 为定值,而现在已证 $\cos(A-B)=-\frac{1}{2}$,则应用条件

$$\cos^2 C=(\cos A+\cos B)^2$$

将 C 转化为 A,B,然后用和化积及积化和的手段得出角 $A-B$,此时就可以用(1)已得的结论代入,观察是否已达到证明之目的.

证明　(1)因为

$$\sin A+\sin B=-\sin C \tag{19}$$

$$\cos A+\cos B=-\cos C \tag{20}$$

将式(19),(20)分别平方后相加得

$$2+2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)=1$$

即

$$2\cos(A-B)=-1$$

所以

$$\cos(A-B)=-\frac{1}{2}$$

同理可证

$$\cos(B-C)=\cos(C-A)=-\frac{1}{2}$$

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=$

$\cos^2 A+\cos^2 B+(\cos A+\cos B)^2=$

$2\cos^2 A+2\cos^2 B+2\cos A\cos B=$

$2+\cos 2A+\cos 2B+2\cos A\cos B=$

$2+2\cos(A+B)\cos(A-B)+$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=$

$2+2\cos(A+B)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos(A+B)-\frac{1}{2}=$

$\frac{3}{2}=$定值

例 17　已知 $\sec\alpha+\csc\alpha=a$，求证

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{a^2+1}}{a^2}$$

思考方法　条件式与求证式的角没有差异，函数有差异. 用同角关系可将条件化为

$$\sin\alpha+\cos\alpha=a\sin\alpha\cos\alpha \tag{21}$$

求证式中有 a^2，在这里 a 是一次的，故将式(21)两边平方得

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=a^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \tag{22}$$

注意到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，故等式(22)实质是视 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 为未知数的一元二次方程. 解方程即可求出求证式的左边. 我们估计到所得结论必是求证式的右边.

证明　因为

$$\sec\alpha+\csc\alpha=a$$

所以

$$\sin\alpha+\cos\alpha=a\sin\alpha\cos\alpha \tag{23}$$

式(23)两边平方得

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=a^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

即

$$a^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-1=0$$

所以

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{a^2+1}}{a^2}$$

例 18 已知$\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}(a>0,b>0)$，

求证：$\dfrac{\sin^8 x}{a^3}+\dfrac{\cos^8 x}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

思考方法 条件式与求证式的角相同，突出的差异是运算. 根据条件式与求证式右边的差异，如果我们将条件式立方，可得

$$\frac{1}{(a+b)^3}=\left(\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\right)^3=$$

$$\frac{\sin^{12} x}{a^3}+\frac{\cos^{12} x}{b^3}+\frac{3\sin^4 x\cos^4 x}{ab(a+b)} \tag{24}$$

而要证明求证式，则只需将式(24)右端化简变为求证式的右端即可. 但是当我们着手时，就会发现计算量是大的. 复杂的变形，逼迫我们另觅途径. 例 16 以及第 4 章内的例 8 都提供了我们一个有用的变量代换的方法. 从这个方法出发，如果我们利用

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

以及条件式，视 $\sin^2 x=u,\cos^2 x=v$ 为未知数，解方程组，不正好可以把 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 求出来用 a,b 表示吗？然后代入求证式的左边，则左边只含 a,b，此时化简后，我们期望就能获得$\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

证明　令 $u=\sin^2 x,v=\cos^2 x$. 由条件式我们可得

$$\begin{cases}\dfrac{u^2}{a}+\dfrac{v^2}{b}=\dfrac{1}{a+b}\\ u+v=1\end{cases}$$

由第二个方程得 $v=1-u$,代入第一个方程,得

$$\frac{1}{a}u^2+\frac{1}{b}(1-u)^2=\frac{1}{a+b}$$

整理得

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)u^2-\frac{2}{b}u+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$$

$$(a+b)^2u^2-2a(a+b)u+a^2=0$$

$$[(a+b)u-a]^2=0$$

所以

$$u=\frac{a}{a+b}$$

代入 $v=1-u$ 中可得

$$v=\frac{b}{a+b}$$

也就是

$$\sin^2 x=\frac{a}{a+b},\cos^2 x=\frac{b}{a+b}$$

将获得之结果代入求证式左边,得

$$\begin{aligned}\text{左边}=&\frac{(\sin^2 x)^4}{a^3}+\frac{(\cos^2 x)^4}{b^3}-\\ &\frac{1}{a^3}\left(\frac{a}{a+b}\right)^4+\frac{1}{b^3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^4=\\ &\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\\ &\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}=\\ &\text{右边}\end{aligned}$$

例 19 已知 $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$，$\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 求证：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

思考方法 条件式中有 θ 的函数，而求证式中没有 θ，故我们的任务是消去 θ，获得一个只含 a,b,x,y 的等式. 与前两例想法相同，可以从条件式的两个等式解出 $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，然后代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 中，即得到只含 a,b,x,y 的等式了. 化简后应得求证式. 另一种想法可以利用条件式中的第一个等式. 化简后应得求证式. 再一种想法可以利用条件式中的第一个等式以及同角三角函数的关系式，求出 $\sin^2\theta$ 及 $\cos^2\theta$，然后代入条件式中的第二个等式. 下面的证明采用第二方案.

证明 因为

$$x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2} \tag{25}$$

所以式(25)两边平方后可得

$$x^2\sin^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\cos^2\theta=x^2+y^2 \tag{26}$$

$$x^2(1-\sin^2\theta)+2xy\sin\theta\cos\theta+y^2(1-\cos^2\theta)=0 \tag{27}$$

$$x^2\cos^2\theta+2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\sin^2\theta=0 \tag{28}$$

若 $\cos\theta=0$，则 $y=0$，代入第二条件式得 $x^2=a^2$. 此时求证式显然成立；

若 $\cos\theta\neq0$，将式(28)化为

$$y^2\tan^2\theta+2xy\tan\theta+x^2=0$$

$$(y\tan\theta+x)^2=0$$

所以

$$y\tan\theta+x=0$$

在 $\cos\theta\neq0$ 时，$y\neq0$，故 $\tan\theta=-\dfrac{x}{y}$. 利用同角关系式

得

$$\cos^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2},\sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

将所得结果代入第二条件式得

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

所以

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

例 17、例 18、例 19 再次显示了解方程组的方法在证明三角等式时的作用. 望读者细心领会.

练习题

1. 设 $A+B+C=\pi$，求证下列等式：

(1) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+\cos A\cos B\cos C$；

(2) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$；

(3) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{A+B}{4}\cdot\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}$；

(4) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{B+C}{4}\cdot\cos\frac{C+A}{4}$；

(5) 若 n 是 $4m\pm1$ 型整数，则

$\sin nA+\sin nB+\sin nC=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cdot\cos\frac{nC}{2}$

(6)又若 n 是 $4m$ 或 $4m+2$ 型整数，则

$$\sin nA+\sin nB+\sin nC=$$
$$-4\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$$

(7) $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$

2. 已知 $\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)}$，求证：$\tan^2\dfrac{x}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}$.

3. 已知 $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}+\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\alpha}=1$，求证：$\tan^2 x=\tan\alpha\tan\beta$.

4. 已知 $A+B+C=\pi$，$\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=n\sin\dfrac{C}{2}$，求证：$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{n-1}{n+1}$（其中 $n\neq-1$）.

5. 设 $A+B+C+D=4\pi$，求证

$$\sin(A+B-C-D)+\sin(A+B-C+D)+$$
$$\sin(A+B+C-D)=4\sin(A+B)\cos C\cos D$$

6. 已知 $\dfrac{\tan(\theta+\alpha)}{x}=\dfrac{\tan(\theta+\beta)}{y}=\dfrac{\tan(\theta+\gamma)}{z}$，求证

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

7. 已知 $P\cos(A+B)+\cos(A-B)=P\cos(B+C)+\cos(B-C)=P\cos(C+A)+\cos(C-A)$.

求证：$\dfrac{\tan A}{\tan\dfrac{B+C}{2}}=\dfrac{\tan B}{\tan\dfrac{C+A}{2}}=\dfrac{\tan C}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$.

8. 已知 $\dfrac{e^2-1}{1+2e\cos\alpha+e^2}=\dfrac{1+2e\cos\beta+e^2}{e^2-1}$（$e>1$），

求证：$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}=\left(\dfrac{1+e}{1-e}\right)^2$.

9. 已知 $\cos A=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$,

求证：$\tan^2\dfrac{A}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}$.

10. 已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$,

求证：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1+m}{1-m}\tan\alpha$.

11. 已知 $\sin\alpha=a\sin\beta$, $\tan\alpha=b\tan\beta$,

求证：$\cos^2\alpha=\dfrac{a^2-1}{b^2-1}$.

12. 已知 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$，求证：$\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$.

13. 已知$\dfrac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$,

求证：$\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$.

14. 已知 $x\cos\theta+y\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$,

$y\cos\theta=x\cos\theta+a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

求证：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

15. 给出例 14 的另一个证明.

三角条件等式的证明Ⅱ

第6章

在$\triangle ABC$中，记三内角为A,B,C，它们所对的边的长为a,b,c，半周记为s，$s=\frac{a+b+c}{2}$，面积记为Δ，外接圆半径记为R，内切圆半径记为r，则以上诸量之间有如下关系：

1. 正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；

2. 余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$等；

3. 射影定理$c=a\cos B+b\cos A$等；

4. 正切定理$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$等；

5. 半角定理$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}\text{等}$$

6. 面积公式$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$，

$$\Delta=sr$$

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{等;}$$

7. 内切圆半径 $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$;

8. 外接圆半径 $R=\dfrac{a}{2\sin A}$等.

对以上公式,我们也应该像第 2 章中所指那样去理解、去记忆. 但应注意的是,这些公式中除含有角、函数、运算外,又多了三角形中的线段. 因此对这些公式的理解及记忆,还必须将这些特殊性加进去. 要掌握这些公式在什么时候将边变为角,又在什么时候将角变为边.

我们把在三角形内的等式证明与前几章中的等式证明分开. 固然,三角形内的等式都是条件等式,但这些等式有其特殊性,因此分开进述证明方法,无疑是有益的.

例 1　在$\triangle ABC$ 中,求证

$$\frac{a+c}{a+b}=\frac{\cos\dfrac{B}{2}\sin\left(\dfrac{B}{2}+C\right)}{\cos\dfrac{C}{2}\sin\left(\dfrac{C}{2}+B\right)} \tag{1}$$

思考方法　等式(1)的左边是边长之比,右边是角的函数之比,故首先应对左边利用正弦定理

$$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$$

将边转化为角的函数

$$\text{左边}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin A+\sin B}$$

此时,左边有角 A,右边无角 A,再利用条件

$$A=\pi-(B+C)$$

使左边消去 A. 此时左边是和商,右边是积商,故分子分母分别和化积,即可达目的.

证明 左边 $=\dfrac{2R\sin A+2R\sin C}{2R\sin A+2R\sin B}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin A+\sin B}=$

$$\dfrac{\sin(B+C)+\sin C}{\sin(B+C)+\sin B}=$$

$$\dfrac{2\sin\left(\dfrac{B}{2}+C\right)\cos\dfrac{B}{2}}{2\sin\left(B+\dfrac{C}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}}=$$

$$\dfrac{\sin\left(\dfrac{B}{2}+C\right)\cos\dfrac{B}{2}}{\sin\left(\dfrac{C}{2}+B\right)\cos\dfrac{C}{2}}=$$

右边

例 2 在 $\triangle ABC$ 中,求证

$$(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}=c^2$$

思考方法 等式左边有角 $\dfrac{C}{2}$ 的函数,右边只有边. 故应该用 a,b,c 来表示 $\dfrac{C}{2}$ 的正余弦平方. 我们想起半角公式

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos C}{2},\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{2}$$

而余弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

又可将 $\cos C$ 转化为边,当这些完成后,经过合并同类项、约分,估计即可得到 c^2. 但这个题,如果这样做可能更简单些,即将等式左边的 $(a-b)^2$,$(a+b)^2$ 都展

开，又

$$\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1$$

故左边可化简为

$$\text{左边}=a^2+b^2+2ab\left(\sin^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{C}{2}\right)=$$
$$a^2+b^2-2ab\cos C$$

再根据余弦定理直接可以得到右边.

证明　左边 $=(a^2-2ab+b^2)\cos^2\dfrac{C}{2}+$

$$(a^2+2ab+b^2)\sin^2\frac{C}{2}=$$
$$a^2\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+$$
$$b^2\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)-$$
$$2ab\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)=$$
$$a^2+b^2-2ab\cos C=c^2=$$
右边

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\cot A+\cot B+\cot C)=$$
$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \tag{2}$$

思考方法　等式(2)左边是 A,B,C 的函数，右边是 a,b,c 的代数式. 故应采用公式将角的函数转化为边 a,b,c. 显然 $\sin A,\sin B,\sin C$ 可运用正弦定理 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ 等变为边. $\cot A$ 并没有现成公式. 但

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

而
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

故
$$\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\bigg/\frac{a}{2R}=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$$

经过上述转化后,便只剩下运算的矛盾了

$$\text{左边}=\frac{a+b+c}{2R}\cdot$$
$$\frac{R(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)}{abc}=$$
$$\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=$$
$$\frac{1}{2abc}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

不要轻易打开括号,首先要看看右边需要我们做些什么.右边是积,且有 $a^2+b^2+c^2$.现在左边正有这个因式.比较左右,我们想$\frac{1}{abc}(a+b+c)=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$应该成立,而这已是十分明显的了.

证明 因为
$$\sin A=\frac{a}{2R},\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$$

所以
$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\bigg/\frac{a}{2R}=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$$

同理
$$\cot B=\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc},\cot C=\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

故
$$\text{左边}=\frac{a+b+c}{2R}\cdot\frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}=$$

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\cdot\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=$$

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=$$

右边

例 4　在$\triangle ABC$中,求证

$$b^2\cos 2C+2bc\cos(B-C)+c^2\cos 2B=a^2$$

思考方法　本题与例 2 结构是相同的,为了把角的函数化为边,可借用余弦定理或射影定理,首先应用二倍角公式以及差角公式化为单角.在这里使用射影定理比余弦定理来得简便.

证明　左边$=b^2(2\cos^2 C-1)+2bc(\cos B\cos C+\sin B\sin C)+c^2(2\cos^2 B-1)=2(b^2\cos^2 C+2bc\cos B\cos C+c^2\cos^2 B)+2bc\sin B\sin C-2bc\cos B\cos C-b^2-c^2=2(b\cos C+c\cos B)^2-2bc\cos(B+C)-b^2-c^2=2a^2-(b^2+c^2-2bc\cos A)=2a^2-a^2=a^2=$右边

例 5　在$\triangle ABC$中,求证

$$a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\cos A+b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})\cos B+c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\cos C=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})$$

思考方法　本题同样可借用余弦定理使左边不含有A,B,C的余弦,化为一个代数的因式分解题,但计算较繁.若用射影定理,同样可达到消灭A,B,C的函数,将角转化为边,但计算量小多了.我们来用第二个方案.

证明　左边$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(b\cos A+a\cos B)+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(c\cos B+$

$$b\cos C)+a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(c\cos A+a\cos C)=$$
$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}a+a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}b=$$
$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})$$

例 6 在$\triangle ABC$中,a,b,c三边成等差数列,即$a+c=2b$,求证:$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$.

思考方法 已知是边的等式,求证的是角的函数等式.为了获得求证式,首先应将条件式$a+c=2b$转化为角的等式.借用正弦定理即得$2\sin B=\sin A+\sin C$.这个条件式中有B,而求证式中无B.条件式中A,C是单角,求证式中是半角$\frac{A}{2},\frac{C}{2}$.利用$B=\pi-(A+C)$以及二倍角公式,和化积公式可将A,B,C转化为$\frac{A}{2},\frac{C}{2}$.因为

$$2\sin B=\sin A+\sin C$$

所以

$$2\sin(A+C)=\sin A+\sin C$$

于是

$$4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

因为
$$\sin\frac{A+C}{2}\neq 0$$

故
$$2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$$

再利用和差角公式使$\frac{A+C}{2},\frac{A-C}{2}$转化为$\frac{A}{2},\frac{C}{2}$,这样角的差异全部解决,剩下的只是函数与运算的差异了.利用同角三角函数关系,估计不会有太大的困难.

证明　由 $a+c=2b$，可得

$$\sin A+\sin C=2\sin B$$

因为

$$B=\pi-(A+C)$$

所以

$$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$$

化积得

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

因为

$$\sin\frac{A+C}{2}\neq 0$$

所以

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$$

所以

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

合并同类项得

$$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

两边除以 $3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$ 得

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

例 7　在$\triangle ABC$ 中，已知

$$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$$

求证：(1) $\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$；

(2) $\triangle$ABC 中的最大角是 $120°$.

思考方法　条件式是边的等式，求证式是角的函数的比例等式. 因求证式的函数都是正弦，根据正弦定理

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$$

故本题实质上只需由条件式求出 $a:b:c$ 即可. 这实质上是一个代数条件等式的证明. 我们引入比例系数 k. 设

$$b+c=4k$$
$$c+a=5k$$
$$a+b=6k$$

解此方程组即得

$$a=\frac{7}{2}k,b=\frac{5}{2}k,c=\frac{3}{2}k$$

故　$$a:b:c=7:5:3$$

从而即得求证式(1). 对(2)只需用余弦定理证明即可. 显然最大角是 A

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=\frac{34-49}{30}=-\frac{1}{2}$$

所以 $A=120°$.

例 8　在$\triangle ABC$中，$A:B:C=4:2:1$，求证

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

思考方法　条件式给的是角的关系，求证式是边的关系，自然想到正弦定理. 求证式左边是 a,b，右边是 c.

因为

$$a=2R\sin A,b=2R\sin B.$$

而 $A=4C,B=2C$. 这样用正弦定理自然就将 a,b 转化为角 C 的正弦. 求证式左边是和，右边是积，自然

想到通分化积. 最后由于结果是角 C 的函数,再转化为边 c,又必须用正弦定理 $c=2R\sin C$.

证明　因为

$$A:B:C=4:2:1$$

所以

$$A=4C,B=2C$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2R\sin 4C}+\frac{1}{2R\sin 2C}=$$

$$\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 2C+\sin 4C}{\sin 4C\sin 2C}=$$

$$\frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin 3C\cos C}{\sin 4C\cdot 2\sin C\cos C}=$$

$$\frac{\sin 3C}{2R\sin 4C\sin C}=\frac{1}{2R\sin C}\cdot\frac{\sin 3C}{\sin 4C}=$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin 3C}{\sin 4C}=\frac{1}{c}$$

最后一步是因为 $A+B+C=4C+2C+C=7C=\pi$,即 $3C=\pi-4C$,所以 $\sin 3C=\sin 4C$.

例 9　在$\triangle ABC$中,已知 $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$,求证:(1)$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$;(2)$a+c=3b$.

思考方法　条件式与求证式(1)的角的差异在于条件式中有$\frac{B}{2}$,求证式(1)中无$\frac{B}{2}$,故应该用$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}$代入条件式消去$\frac{B}{2}$,然后用和角公式将$\frac{A+C}{2}$函数化为$\frac{A}{2}$,$\frac{C}{2}$的函数,合并同类项后,只剩下函数的差异,用同角关系即可解决.

证明(1)　因为

$$\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

所以

$$\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

两边除以 $2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$即得 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.

要证求证式(2),由于(2)是边的等式,而条件是角的函数等式,故自然应采用正弦定理先将边转化为角,利用角之间的关系,将 A,C 转化为 B,最后再用正弦定理,将角 B 的函数转化为边 b.

$$左边=a+c=2R(\sin A+\sin C)$$

$$右边=3b=6R\sin B$$

我们只需证明

$$\sin A+\sin C=3\sin B$$

左边是和,右边是积,故应和化积得

$$左边=2R\cdot 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

剩下的工作是转角 A,C 为 B

利用　$$\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$$

转化为$\frac{B}{2}$,而 $\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{A+C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$,再加上条件 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}$也可转化$\frac{A}{2}$,$\frac{C}{2}$为$\frac{B}{2}$. 从而

达到了 A,C 转化为 B 的目的.

（2）　$a+c=2R(\sin A+\sin C)=$

$$2R\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=$$

$$2R\cdot 2\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2}+\right.$$

$$\left.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=$$

$$2R\cdot 2\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}\right)=$$

$$2R\cdot 2\cos\frac{B}{2}\cdot 3\sin\frac{B}{2}=$$

$$3\cdot 2R\sin B=3b=$$

右边

例 10　在$\triangle ABC$ 中,$C=60°$求证

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

思考方法　条件是 $C=60°$,要求证$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$. 在代数中,凡遇到这样的条件等式证明,一般都采用分析法. 即假设求证式成立,通过去分母、化简,能否获得一个明显成立的等式. 若能,并且求证式化为已知式的过程每一步可逆,则问题就获得解决.

证明　假设$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$成立,即

$$(a+b+2c)(a+b+c)=3(a+c)(b+c)$$

即

$$a^2+b^2+2c^2+2ab+3ac+3bc=3ab+3ac+3bc+3c^2$$

即

$$a^2+b^2-ab=c^2$$

因为 $C=60^\circ$，据余弦定理即有 $c^2=a^2+b^2-ab$. 又因上述推理过程每一步都可逆，从而求证式获证.

例 11 在$\triangle ABC$中，求证

$$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)=c^2-2bc\cos(60^\circ+A)$$

思考方法 求证式的形状，使我们想到利用余弦定理来解决. 要证求证式，只需证

$$a^2-c^2=2ab\cos(60^\circ+C)-2bc\cos(60^\circ+A) \quad (3)$$

即可. 等式(3)中有 a^2，c^2，$2ab$，$2bc$，故我们利用余弦定理的两个表达式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (4)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad (5)$$

它们正好包含求证式中出现的所有项，式(4)，(5)相减即得

$$a^2-c^2=2ab\cos C-2bc\cos A+c^2-a^2 \quad (6)$$

$$2(a^2-c^2)=2ab\cos C-2bc\cos A \quad (7)$$

$$a^2-c^2=ab\cos C-bc\cos A \quad (8)$$

要证求证式，只需证

$$2ab\cos(60^\circ+C)-2bc\cos(60^\circ+A)=ab\cos C-bc\cos A \quad (9)$$

即可. 式(9)左边是和角，右边是单角，用和角公式打开括号即得

$$2ab\cos(60^\circ+C)-2bc\cos(60^\circ+A)=$$

$$2ab\left(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)-2bc\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)=$$

$$ab\cos C-bc\cos A+\sqrt{3}b(c\sin A-a\sin C)$$

这个结果比较式(9)右边，暗示我们后面一项应为 0，事实上由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $a\sin C=c\sin A$，故 $c\sin A-a\sin C=0$.

证明　（略）

例 12　在$\triangle ABC$ 中，已知

$$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

思考方法　这是一个性质证明题，但本质上说，还是一个等式证明题. 由于条件式中，a 与 b，A 与 B 的地位的对称性，故自然猜想，是要证 $a=b$ 或 $A=B$. 条件式中既有边，又有角，若将其变形为

$$a\left(\tan A-\tan\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\tan\frac{A+B}{2}-\tan B\right)$$

则只需观察括号内的两个因式是否相等. 若相等约去，即可得 $a=b$. 为此可将等式左右的括号内的项化积得

$$a\cdot\frac{\sin A\cos\frac{A+B}{2}-\cos A\sin\frac{A+B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}=$$

$$b\cdot\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos B-\cos\frac{A+B}{2}\sin B}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}$$

即

$$a\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A}=b\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B}$$

所以

$$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}\text{或}\sin\frac{A-B}{2}=0$$

前一结果并没有直接得到 $a=b$，此时可将 a,b 转化为角，利用 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$；也可用余弦定

理，将 $\cos A$，$\cos B$ 转化为 a，b，c. 前一方案证 $A=B$. 后一方案证 $a=b$ 均可. 我们取第一方案即得到 $\tan A=\tan B$. 因 A，B 是三角形内角，在第Ⅰ，Ⅱ象限，正切是单调的，故 $A=B$，第二结果得 $A=B$ 是明显的. 从而证明了我们的命题.

证明　因为

$$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

所以

$$a\left(\tan A-\tan\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\tan\frac{A+B}{2}-\tan B\right)$$

于是

$$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}\text{或}\sin\frac{A-B}{2}=0$$

所以

$$\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}\text{或}\frac{A-B}{2}=0$$

即

$$\tan A=\tan B\text{ 或 }A-B=0$$

所以

$$A=B$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例 13　在 $\triangle ABC$ 中，有一个内角是 60° 的充分必要条件是 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$.

思考方法　由第 5 章的练习题 1(5)可知

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

故条件式

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$$

等价于条件

$$\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=0$$

从而命题的证明变得十分容易了.

证明　必要性:设有一内角为 60°

则

$$\frac{3A}{2},\frac{3B}{2},\frac{3C}{2}$$

中必有一个为 90°. 故

$$\cos\frac{3A}{2},\cos\frac{3B}{2},\cos\frac{3C}{2}$$

中必有一个为 0,所以

$$\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=0$$

即

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$$

充分性:设 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$

则

$$-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=0$$

故

$$\cos\frac{3A}{2}=0,\cos\frac{3B}{2}=0,\cos\frac{3C}{2}=0$$

中必有一个成立.

所以 $\frac{3A}{2},\frac{3B}{2},\frac{3C}{2}$ 中必有一个是 90°.

故 A,B,C 中必有一个是 60°.

例 14　在 ΔABC 中,已知 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$,试确定 $\triangle ABC$ 的形状.

思考方法　三角形的形状只有以下三种情形:

(1)钝角三角形;(2)直角三角形;(3)锐角三角形.若从边来分类,则有等边三角形、等腰三角形和一般的三角形.故尽管确定形状的题的求解目标不是明显的,但实质上是有限的六种,自然就不难判断了.一般遇到形状判断的题,都是将条件式尽量化简(如例 12)然后观察,是否有两条边相等?或两个角相等,……逐渐给出明显的结论.如果条件式是关于 A,B,C 对称的(例 13)则和化积是重要的手段,即让等式的另一端变为0.这些望读者仔细领会.对于本例,我们容易将条件式化为

$$\sin A\cos A=\sin B\cos B \tag{10}$$

式(10)两边乘以 2,并用二倍角公式即得

$$\sin 2A=\sin 2B \tag{11}$$

此时形状就容易确定了.因 A,B 都是三角形的内角,它们都小于 180°,故要使 $\sin 2A=\sin 2B$,只有两种可能

$$2A=2B \text{ 或 } 2A=180^\circ-2B \tag{12}$$

即 $A=B$ 或 $A+B=90^\circ$.

从而$\triangle ABC$ 是等腰三角形或是直角三角形.

练习题

1.在 ΔABC 中,求证下列等式:

(1)$a=b\sin A\csc B$;

(2)$\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+b}{c}$;

(3)$\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$;

(4) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$；

(5) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$；

(6) $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$；

(7) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$；

(8) $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$；

(9) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$；

(10) $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$.

2. 在 ΔABC 中，已知 a^2, b^2, c^2 成等差数列，求证

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\cos B}{b}$$

3. 在 ΔABC 中，b, a, c 成等比数列，求证

$$\cos(B-C)=1-\cos A-\cos 2A$$

4. 在 ΔABC 中，已知 $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$，求证：$a\sin\left(\dfrac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$.

5. 在 ΔABC 中，若 $\dfrac{a-b}{c}=\cos\theta$，求证

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{c\sin\theta}{2\sqrt{ab}}$$

6. 在△ABC 中，点 I 是 BC 边中点，过点 I 作 BC 边的垂线分别交 AC，AB 于点 M，N. 如果点 M 恰是 IN 的中点，求证：

(1) $\sin A=3\sin(B-C)$；

(2) $a^2=3(b^2-c^2)$.

7. 在△ABC 中，已知 $\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$，求证

$$a^2+c^2=2b^2$$

8. 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\dfrac{c-b}{c}$，求证：$A=60^\circ$.

9. 设$\triangle ABC$为锐角三角形，而且

$$a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$$

求证：$C=45^\circ$.

10. 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，

求证：$\triangle ABC$是等边三角形.

11. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，

求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

12. 在$\triangle ABC$中，已知$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$，

求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

13. $\triangle ABC$中，$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，

求证：$\triangle ABC$中必有一内角为120°

14. 在$\triangle ABC$中，$B<90^\circ$，且$\lg a-\lg c=\lg \sin B=\lg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.

15. 在$\triangle ABC$中，$a^3+b^3+c^3-3abc=0$，试确定$\triangle ABC$的形状.

16. 在$\triangle ABC$中，已知$\cos 2B+\cos 2C-\cos 2A=1$

$$2\sin B\sin C=\sin A$$

试确定$\triangle ABC$的形状.

17. 设$\triangle ABC$是锐角三角形，且满足

$$\tan A\cdot\tan C=3,\tan B\cdot\tan C=6$$

求证：$A=45^\circ$.

18. 在$\triangle ABC$中，若满足$\cos A+\cos B=\sin C$，那

么这个三角形是什么三角形？又若满足 $\cot \dfrac{A}{2}=\dfrac{b+c}{a}$，则$\triangle ABC$ 又是什么三角形？

19. 在$\triangle ABC$ 中，$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$，试确定$\triangle ABC$ 的形状.

20. 在$\triangle ABC$ 中，求证以下等式：

(1)$\tan \dfrac{B}{2}\cdot \tan \dfrac{C}{2}=\dfrac{s-a}{s}$；

(2)$(a+b+c)\left(\tan \dfrac{A}{2}+\tan \dfrac{B}{2}\right)=2c\cdot \cot \dfrac{C}{2}$；

(3)$b\cdot \cos^2 \dfrac{C}{2}+c\cdot \cos^2 \dfrac{B}{2}=s$；

(4)$\sin B=\dfrac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$；

(5)$bc\sin^2 \dfrac{A}{2}+ca\sin^2 \dfrac{B}{2}+ab\sin^2 \dfrac{C}{2}=bc+ca+ab-s^2$；

(6)$a\cos \dfrac{B}{2}\cos \dfrac{C}{2}\csc \dfrac{A}{2}=s$；

(7)$abcr=4R(s-a)(s-b)(s-c)$；

(8)$4Rrs=abc$；

(9)$\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}$；

(10)$\dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}=\dfrac{r}{R}$.

21. 设$\triangle ABC$ 的三边长分别为

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z},\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$$

求证：$\triangle ABC$ 的面积$\triangle=\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}}$.

反三角函数等式的证明

第7章

在三角证明题中，常会遇到这样一类问题：

(1)求证：$\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}=\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)$；

(2)求证：$\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$；

(3)求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(|x|\leqslant 1)$.

等. 这些等式中含有反三角函数符号. 像这样的一类等式，左边与右边的差异一般地只有函数与运算两种. 对于这类问题的证明，前几章所讲述的证明方法无疑是重要的，但这类等式的证明，还有其特殊性. 例如(1)所给出的等式，左边是余弦分别等于$\frac{3}{7}$和$\frac{9}{11}$的两个角之和，右边是余弦为$-\frac{13}{77}$的角. 要证明它们相等，我们并没有现成的公式可以对左边的两个角进行合并. 当然，我们可以发现并证明一些专门服务于反三角函数的公式，但是实际上是没有必要的，

因为三角等式内容的丰富性加上数学证明方法的完备性是足以完成反三角函数等式的证明.为了证明一个反三角函数等式的正确性,通常将反三角等式两边分别取适当的、相同的函数并计算它们的函数值.如果反三角等式左边与右边的角的相同函数的值相等,又这两个角在该函数的同一单调区间内,那么,我们就可以证得反三角等式左边与右边的两个角相等.从而完成了证明.这就是反三角函数等式证明的思想方法.因此要证好反三角函数等式,除了掌握好前几章的证题方法外,还必须掌握好反三角函数中的基本概念和公式.对于不同的三角函数的单调区间要有清晰的记忆和理解还有对函数的单调性要有明确的认识.为此我们先罗列一些必要的公式和概念.

当$|x|\leqslant 1$时,$\arcsin x$有意义,它表示一个角,满足条件

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2},\ \sin(\arcsin x)=x$$

当$|x|\leqslant 1$时,$\arccos x$有意义,它表示一个角,满足条件

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\ \cos(\arccos x)=x$$

对任意实数x,$\arctan x$都有意义,它表示满足条件

$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tan} x<\frac{\pi}{2}$,$\tan(\operatorname{arc\,tan} x)=x$的角

对任意实数x,$\operatorname{arccot} x$都有意义.它表示满足条件

$0<\operatorname{arccot} x<\pi$,$\cot(\operatorname{arccot} x)=x$的角

一般地,$\arcsin(\sin x)=x$并不成立,在附加条件下,下列等式是成立的.

$$\arcsin(\sin x)=x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arccos(\cos x)=x(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

$$\arctan(\tan x)=x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arccot}(\cot x)=x(0<x<\pi)$$

例如 $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)\neq\frac{5\pi}{6}$,这是因为 $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ 是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$中的角,而$\frac{5\pi}{6}$并不在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$中,只有利用诱导公式将$\frac{5}{6}\pi$ 诱导到$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$中去,才能出现等式.

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\left[\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$$

公式 $\sin(\arcsin x)=x(|x|\leqslant1)$等,在计算时是十分基本而且重要的.它告诉我们正弦与反正弦的互相“抵消”的现象.正如开平方再平方,事物还原一样.也就是当 x 的反三角函数与括号外的函数不同名时,如 $\cos(\arcsin x)$的计算,就要借助于同角三角函数的关系,将括号的函数转化为与括号外内相同名的正函数,如

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}$$

关于三角函数的单调区间,必须牢记 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$中是单调递增的,从而 $y=\arcsin x(|x|\leqslant 1)$也是单调递增的函数;$y=\tan x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$与 $y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty)$也都是单调递增的;$y=\cos x,x\in[0,\pi]$与 $y=\arccos x,(|x|\leqslant1)$都是单调递

减的；$y=\cot x(0<x<\pi)$ 与 $y=\arctan x(-\infty<x<+\infty)$ 是单调递减的. 而且在同一单调区间中，各函数都是一一对应的. 故当下列等式 $\sin x=\sin\alpha$ 成立，而且知道 x,α 都是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 中的角时，即可推得 $x=\alpha$.

有了上述准备之后，我们便可以进行反三角函数等式的证明了.

例 1　求证

$$\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}=\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)$$

思考方法　等式左边与右边的反函数符号都是反余弦，此时两边取余弦，分别计算它们的函数值即可.

证明　$\cos\left(\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}\right)$（利用和角公式）$=$

$\cos\left(\arccos\frac{3}{7}\right)\cos\left(\arccos\frac{9}{11}\right)-$

$\sin\left(\arccos\frac{3}{7}\right)\sin\left(\arccos\frac{9}{11}\right)=$

$\frac{3}{7}\times\frac{9}{11}-\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{7}\right)}\times$

$\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{9}{11}\right)}=\frac{27}{77}-\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}\times$

$\sqrt{1-\left(\frac{9}{11}\right)^2}=\frac{27}{77}-\frac{\sqrt{40}}{7}\times\frac{\sqrt{40}}{11}=\frac{27}{77}-\frac{40}{77}=-\frac{13}{77}$

在计算中，要注意，因为 $0<\arccos\frac{3}{7}<\pi$，$0<\arccos\frac{9}{11}<\pi$. 故 $\sin\left(\arccos\frac{3}{7}\right)>0$，$\sin\left(\arccos\frac{9}{11}\right)>0$，在用同角关系时，根号前取正号

$$\sin\left(\arccos\frac{3}{7}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{7}\right)}$$

等.

又

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)\right)=-\frac{13}{77}$$

故

$$\cos\left(\arccos\frac{3}{7}-\arccos\frac{9}{11}\right)=\cos\left(\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)\right)$$

又

$$0<\arccos\frac{3}{7}<\frac{\pi}{2},0<\arccos\frac{9}{11}<\frac{\pi}{2}$$

所以

$$0<\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}<\pi$$

又

$$0<\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)<\pi$$

而在$[0,\pi]$中，$y=\cos x$ 是单调函数，故有

$$\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}=\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)$$

例 2 求证：$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

思考方法 对左边取正切，利用和角公式计算其正切值为 1，然后讨论单调区间即可.

证明 $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)=$

$$\frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)+\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1-\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\cdot\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

因为

$$0<\arctan\frac{1}{2}<\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$0<\arctan\frac{1}{3}<\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$0<\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$$

而在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中，$y=\tan x$ 是单调函数. 故由

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}$$

可得

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

例 3　求证：$\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$.

思考方法　将所求证等式变形为

$$\arctan 2+\arctan 3=\pi-\arctan 1$$

两边分别取正切，计算函数值.

证明　$\tan(\arctan 2+\arctan 3)=\frac{2+3}{1-2\times 3}=\frac{5}{1-6}=-1$

$$\tan(\pi-\arctan 1)=-\tan(\arctan 1)=-1$$

所以

$$\tan(\arctan 2+\arctan 3)=\tan(\pi-\arctan 1)$$

因为

$$\frac{\pi}{4}<\arctan 2<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}<\arctan 3<\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\frac{\pi}{2}<\arctan 2+\arctan 3<\pi$$

又

$$\frac{\pi}{2}<\pi-\arctan 1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}<\pi$$

而$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$是 $y=\tan x$ 的单调区间，所以

$$\arctan 2+\arctan 3=\pi-\arctan 1$$

即

$$\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$$

例 4 求证

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

思考方法 若按四角和公式对左边进行计算，则必然较繁. 为此我们设

$$\alpha=\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5},\beta=\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}$$

则 $\tan\alpha=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}=\dfrac{4}{7}$. 所以 $\alpha=\arctan\dfrac{4}{7}$.

同样 $\beta=\arctan\dfrac{3}{11}$，再证

$$\arctan\frac{4}{7}+\arctan\frac{3}{11}=\frac{\pi}{4}$$

即可.

例 5 求证：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(|x|\leqslant 1)$.

思考方法 左边取正弦余弦均可. 但取正弦更好，这是因为

$$0\leqslant \arccos x\leqslant \pi$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}$$

所以

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x+\arccos x\leqslant \frac{3\pi}{2}$$

若取余弦得 $\cos(\mathrm{arcdom}\ x+\arccos x)=0$.

由于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$中余弦为 0 的角有$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$三个，要证我们的结论，还需排除$-\frac{\pi}{2}$及$\frac{3\pi}{2}$，讨论显得冗长. 而取正弦，最后计算得其正弦值为 1，而在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$中正弦值为 1 的角只有$\frac{\pi}{2}$，从而直接就得结论.

证明　$\sin(\arcsin x+\arccos x)=$
$\sin(\arcsin x)\cos(\arccos x)+$
$\cos(\arcsin x)\sin(\arccos x)=$
$x^2+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=$
$x^2+(1-x^2)=1$

而

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x+\arccos x\leqslant \frac{3\pi}{2}$$

所以

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

在这里，为何根号前全取正号，这是因为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}$$

而在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$中余弦为正，故 $\cos(\arcsin x)=$

$\sqrt{1-x^2}$；又 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，而在 $[0,\pi]$ 中，正弦为正，故 $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

例 6 求证

$$\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}(x>-1)\\[2mm]-\dfrac{3\pi}{4}(x<-1)\end{cases}$$

思考方法 将左边取正切，计算正切值，然后进行讨论.

证明 $\tan\left(\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}\right)=$

$$\frac{x+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-x\cdot\dfrac{1-x}{1+x}}=\frac{x+x^2+1-x}{1+x-x+x^2}=$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$$

令 $\dfrac{1-x}{1+x}>0$，则 $(x-1)(x+1)<0$，解之得 $-1<x<1$.

由此得

当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant 0$；

当 $x<-1$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}\leqslant 0$；

当 $x<-1$ 时，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<-\dfrac{\pi}{4}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{1-x}{1+x}\leqslant 0$.

故 $-\pi<\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}<-\dfrac{\pi}{4}$. 而在 $\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{4}\right]$ 中，正切为 1 的角只有 $-\dfrac{3\pi}{4}$，故当 $x<-1$ 时

$$\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=-\frac{3\pi}{4}$$

当 $-1<x\leqslant1$ 时，$-\frac{\pi}{4}<\arctan x\leqslant\frac{\pi}{4}$，$0\leqslant\arctan\frac{1-x}{1+x}<\frac{\pi}{2}$.

故 $-\frac{\pi}{4}<\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}<\frac{3\pi}{4}$. 而在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 中，正切为 1 的角只有 $\frac{\pi}{4}$，故当 $-1<x\leqslant1$ 时

$$\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$$

当 $x\geqslant1$ 时，$\frac{\pi}{4}\leqslant\arctan x<\frac{\pi}{2}$，有

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{1-x}{1+x}\leqslant0$$

故 $-\frac{\pi}{4}<\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}<\frac{\pi}{2}$. 同样可得，当 $x\geqslant1$时，有

$$\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$$

综上所证即得

$$\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\frac{\pi}{4}(x>-1)\\-\frac{3\pi}{4}(x<-1)\end{cases}$$

例 7　已知 $\arccos x+\arccos y+\arccos z=\pi$，求证：$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

思考方法　条件式有反余弦，求证式是一个代数式. 要使反余弦消失，在条件式两边取余弦即可. 然后

在运算上进行平方，消灭运算上的差异，合并同类项，即可得求证式.

证明 因为

$$\arccos x+\arccos y=\pi-\arccos z$$

所以

$$\cos(\arccos x+\arccos y)=\cos(\pi-\arccos z)$$

$$xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=-z$$

$$xy+z=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

所以

$$(xy+z)^2=(1-x^2)(1-y^2)$$

即

$$x^2y^2+z^2+2xyz=1-x^2-y^2+x^2y^2$$

移项即得

$$x^1+y^2+z^2+2xyz=1$$

例 8 设 α,β 都是锐角，且 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

思考方法 求证式是角的等式，条件是三角函数的等式，虽然此题不是用反角函数形式给出，但实质上并无差别. 根据条件式给的是正切，故对求证式左边取正切，只需证 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 即可.

证明 由条件式得

$$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$$

所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=1$$

因为 α,β 都是锐角，故 $0<\alpha+\beta<\pi$，而在 $(0,\pi)$ 中正切为 1 的只有 $\frac{\pi}{4}$，故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

例 9　已知 α,β 为锐角，且满足

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1 \tag{1}$$

$$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0 \tag{2}$$

求证：$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

思考方法　根据条件式与求证式角的差异，将式(1)中的 β 转化为 2β，将式(2)中的 2α 转化为 α，则条件式变为

$$\left.\begin{array}{l}3\sin^2\alpha=\cos 2\beta\\3\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\beta\end{array}\right. \tag{A}$$

由于条件式中所给函数是正弦、余弦，故为了证明求证式，可将求证式左边取正弦，证其为 1. 或取余弦，证其为 0 即可.

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta \tag{3}$$

$$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta \tag{4}$$

要证式(3)等于 1，或要证式(4)等于 0，这些结论都与 α,β 无关. 故式(3)或式(4)中的项应该可合并相互抵消. 两个变量，就可利用条件式，将 $\sin 2\beta=3\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos 2\beta=3\sin^2\alpha$ 代入(3)或式(4)得

$$\sin(\alpha+2\beta)=3\sin^3\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha=3\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=3\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+2\beta)=3\sin^2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha=0$$

假如我们证明采取第一个方案，为了证明 $\sin(\alpha+2\beta)=1$，还要证 $3\sin\alpha=1$. 若我们采取第二个方案，我们的证明已经基本结束了. 下面我们继续分析如何证 $3\sin\alpha=1$. 把它视为求证式，则它与已知条件的角的差异是条件式中有 β，求证式中无 β. 故消去 β 即可. 将条件式(A)两边平方后相加得

$$9\sin^4\alpha+9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$$
$$9\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1$$
$$9\sin^2\alpha=1$$

因为 α 是锐角，故 $3\sin\alpha=1$. 从而问题获得解决.

证法 1　取余弦

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+2\beta)=&\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta=\\&\cos\alpha\cdot 3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha=\\&3\sin^2\alpha\cos\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0\end{aligned}$$

因为 α,β 都是锐角，故 $0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$，而在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 中余弦为 0 的只有 $\frac{\pi}{2}$，故 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

证法 2　左边取正弦，得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+2\beta)=&\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta=\\&\sin\alpha\cdot 3\sin^2\alpha+\cos\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha=\\&3\sin^3\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha=3\sin\alpha\end{aligned}$$

由条件式得

$$3\sin^2\alpha=\cos 2\beta \tag{5}$$
$$3\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\beta \tag{6}$$

式(5)，(6)平方后相加得

$$9\sin^4\alpha+9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$$

解之得 $3\sin\alpha=1$，所以 $\sin(\alpha+2\beta)=1$.

因为 $0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$，而在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 中，正弦为 1 的角只有 $\frac{\pi}{2}$.

所以

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$$

注　从上面两种证法中可以明显地看出，如果所取的函数不一样，解决问题的难度不一样. 第二种证法

虽然麻烦一些，但是利用我们的分析差异，抓联系，捉转化，求统一的证明方法，解决问题也是轻松的. 当然第一种证法好，好在它简便. 为什么用它能简便呢？这是不是碰运气呢？其实不然. 事实上要证 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$，取余弦，要证 $\cos(\alpha+2\beta)=0$. 这常比证 $\sin(\alpha+2\beta)=1$ 的路宽一些. 要证一个代数式为零，可能其代数和为零，也可能分解因式后能提出一个零因式. 所以取余弦来得好些，计算量小些，也有其必然性. 提出这样的分析，供读者三思.

对于本例题，我们再提供一个解法. 由条件得

$$3\sin^2\alpha=\cos 2\beta$$

$$3\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\beta$$

令 $\sin\alpha=x$，$\cos 2\beta=y$，则条件式变为

$$\begin{cases}3x^2=y\\3x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-y^2}\end{cases}$$

解此方程组得

$$x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$$

即

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}, \cos 2\beta=\frac{1}{3}$$

因为 α，β 是锐角，所以

$$0<2\beta<\pi$$

故

$$\alpha=\arcsin\frac{1}{3}, 2\beta=\arccos\frac{1}{3}$$

而对于一切 $|x|\leqslant 1$，总有

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\text{（见例 5）}$$

所以

$$\alpha+2\beta=\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$$

例 10　求证：$\arctan\left(\dfrac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}\right)-\arctan\left(\dfrac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=k\pi+\varphi$. 其中 $k\in\mathbf{R}_{+}$.

思考方法　两边都取正切，只需证左边之正切值为 $\tan\varphi$ 即可.

$$\tan\left[\arctan\left(\frac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}\right)-\arctan\left(\frac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\right]=$$

$$\left(\frac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}-\frac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\Big/\left(1+\frac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}\cdot\frac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=$$

$$\frac{x\cos^2\varphi-x+\sin\varphi+x^2\sin\varphi-x\sin^2\varphi}{\cos\varphi-2x\sin\varphi\cos\varphi+x^2\cos\varphi}\tag{7}$$

为了证式(7)等于 $\tan\varphi$，故分母应该可提出公因式 $\cos\varphi$，这是现成的，而分子应该提出 $\sin\varphi$. 为此将

$$x\cos^2\varphi-x=x(\cos^2\varphi-1)=-x\sin^2\varphi$$

转化为 $\sin\varphi$，这样就可提出公因式 $\sin\varphi$ 了. 剩下的因子我们期望可与分母约去.

证明　$\tan\left[\arctan\left(\dfrac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}\right)-\arctan\left(\dfrac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\right]=$

$$\frac{x\cos^2\varphi-x+\sin\varphi+x^2\sin\varphi-x\sin^2\varphi}{\cos\varphi-2x\sin\varphi\cos\varphi+x^2\cos\varphi}=$$

$$\frac{-2x\sin^2\varphi+\sin\varphi+x^2\sin\varphi}{\cos\varphi(1-2x\sin\varphi+x^2)}=$$

$$\frac{\sin\varphi(1-2x\sin\varphi+x^2)}{\cos\varphi(1-2x\sin\varphi+x^2)}=\tan\varphi$$

$$\arctan\left(\frac{x\cos\varphi}{1-x\sin\varphi}\right)-\arctan\left(\frac{x-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=k\pi+\varphi(k\in\mathbf{R}_{+})$$

练习题

1. 求证下列等式：

(1) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$；

(2) $\arccos\frac{4}{5}+\arctan\frac{3}{5}=\arctan\frac{27}{11}$；

(3) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\operatorname{arccot}3=\frac{\pi}{4}$；

(4) $\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{12}{13}=\arcsin\frac{16}{65}$；

(5) $\arctan n+\operatorname{arccot}(n+1)=\arctan(n^2+n+1)$；

(6) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=\arctan(\sqrt{2}+1)^2$；

(7) $2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{4}=\arctan\frac{32}{43}$；

(8) $\arctan\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+\arctan\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}+\arctan\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=\pi$.

2. 求证：$\arctan x+\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2}$.

3. 求证

$$\arcsin x=\begin{cases}\arccos\sqrt{1-x^2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -\arccos\sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$$

4. 求证：当 $0<x<1$，且 $0<y<1$ 时

$$\arcsin x+\arcsin y=\arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)$$

5. 当 $0<x<1$，$0<y<1$ 时，求证

$$\arccos x-\arccos y=\arctan\frac{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}}{xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$$

6. 求证：$2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\arccos x$.

7. 求证：$\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\arctan x & (x\geqslant 0),\\ -2\arctan x & (x\leqslant 0).\end{cases}$

8. 已知 $\arctan x+\arctan y+\arctan z=\pi$，求证

$$x+y+z=xyz$$

9. 设$|x|\leqslant 1$，求证

$$\arcsin[\cos(\arcsin x)]+\arccos[\sin(\arccos x)]=\frac{\pi}{2}$$

10. 设 α,β 是锐角，而且满足

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2},7\tan\alpha=3\tan\beta$$

求证：$\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

解三角计算题的思路

第8章

前面我们应用找差异，抓联系，促转化，求统一的思考方法研究了三角等式证明的思路. 在这一章我们将看到，这样的思考方法对于解三角计算题同样是有效的.

例 1 已知 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值.

思考方法 与条件等式证明的思考方法相似，我们观察已知条件与所求的函数式之间的差异. 已知与所求之间，既有角、函数之差异，也有运算的差异. 如果将已知和条件的 2θ 化为 θ 的函数可得

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{3}{5} \tag{1}$$

将此条件与 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 联立，解方程组，即可得 $\cos^2\theta=\frac{4}{5}$，$\sin^2\theta=\frac{1}{5}$. 代入所求的函数式中，即可获得要计算的结论. 假若我们从所求函数式入手，先将 θ 化为 2θ 则有

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta)^2+(\sin^2\theta)^2=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos^2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(2+\cos^2 2\theta) \tag{2}$$

然后代入已知条件 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$即可获得结果.

又假设我们利用对称式的思想方法,所求的函数式又可以化为

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{3}$$

利用正弦二倍角公式,又可将式(3)化为

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

然后再利用同角关系,将 $\sin^2 2\theta$ 转化为 $\cos^2 2\theta$ 变为已知,代入即可求出结果.由上分析我们解之如下.

解法 1　因为

$$\cos 2\theta=\frac{3}{5}$$

所以

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{3}{5}$$

又

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

将上述两等式相加以及相减,即可解之得

$$\cos^2\theta=\frac{4}{5},\sin^2\theta=\frac{1}{5}$$

所以

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{1}{25}=\frac{17}{25}$$

解法 2　$\cos^4\theta+\sin^4\theta=\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]^2+\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]^2=\frac{1}{4}(2+2\cos^2 2\theta)=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\times\frac{25+9}{25}=\frac{1}{2}\times\frac{34}{25}=\frac{17}{25}$

解法 3　$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{25}\right)=\frac{17}{25}$

例 2　已知 $\sin x+\cos x=a$，求（1）$\sin^3 x+\cos^3$；（2）$\sin^4 x+\cos^4 x$；（3）$\sin^5 x+\cos^5 x$.

思考方法　已知与所求之间的主要差异是运算. 若令 $\sin x=u$，$\cos x=v$，我们问题就变为已知 $u+v=a$，求 u^3+v^3，u^4+v^4，u^5+v^5. 这实质上是代数中用基本对称多项式 $u+v$，uv 来表示任意一个二元对称多项式的问题. 在代数中，若 $f(u,v)=f(v,u)$（在这里 $f(u,v)$ 是 u,v 的一个多项式），则 $f(v,u)$ 称为二元对称多项式. 在代数中已证明，任何二元对称 $f(u,v)$ 都可以用基本对称多项式 $u+v$，uv 的多项式表示出来. 例如

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$$

$$u^3+v^3=(u+v)[(u+v)^2-3uv]=(u+v)^3-3(uv)(u+v)$$

$$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2(uv)^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2(uv)^2$$

$$u^5+v^5=(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+u^4)=$$

$$(u+v)[(u^4+v^4)-uv(u^2+v^2)+(uv)^2]=(u+v)\{[(u+v)^2-2uv]^2-2(uv)^2-uv[(u+v)^2-2uv]+(uv)^2\}=(u+v)\{[(u+v)^2-2uv]^2-vu(u+v)^2+(uv)^2\}=(u+v)\{(u+v)^4-5(uv)(u+v)^2+7(uv)^2\}$$

等.从这里我们可见,$u+v$,uv 是二元对称多项式中最基本的,故称为二元基本对称多项式.当代数中的对称多项式应用于三角函数时,由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,故由 $\sin x+\cos x=a$,不难计算出 $\sin x\cos x$.事实上

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x)^2-(\sin^2 x+\cos^2 x)]=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x)^2-1]=\frac{1}{2}(a^2-1)$$

因而在三角计算题中,对于已知条件,往往只给出一个基本对称多项式的值就够了.由一个基本对称多项式的值,就可以计算出另一个基本对称多项式的值,然后运用代数中的手法,就可以求出任意对称多项式的值了.

解 由 $\sin x+\cos x=a$,得 $\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$.

由此

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)[(\sin x+\cos x)^2-3\sin x\cos x]=a\left[a^2-3\cdot\frac{a^2-1}{2}\right]=$$

$$\frac{a(3-a^2)}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x=&[(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x]^2-\\&2[\sin x\cos x]^2=[a^2-(a^2-1)]^2-\\&\frac{(a^2-1)^2}{2}=1-\frac{1}{2}(a^4-2a^2+1)=\\&-\frac{1}{2}a^4+a^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^5 x+\cos^5 x=&(\sin x+\cos x)[(\sin x+\cos x)^4-\\&5(\sin x\cos x)(\sin x+\cos x)^2+\\&7(\sin x\cos x)^2]=\\&a\left[a^4-5\cdot\frac{a^2-1}{2}\cdot a^2+7\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2\right]=\\&\frac{1}{4}a^5-a^3+\frac{7}{4}a\end{aligned}$$

例 3　已知 α,β 为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$，求 $\sin\beta$.

思考方法　已知与所求的角有差异，从角入手.

因为

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$$

故

$$\begin{aligned}\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\\\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{11}{14}\cos\alpha-\frac{1}{7}\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

现剩下的差异是函数. 利用同角关系可求出 $\cos\alpha$，$\cos(\alpha+\beta)$，从而问题即可解决.

解　因为 α 是锐角，而 $\sin\alpha=\frac{1}{7}$.

故

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{4}{7}\sqrt{3}$$

因为 α,β 都是锐角，故 $0<\alpha+\beta<\pi$.

而 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$，故

$$\cos(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\pm\frac{5}{14}\sqrt{3}$$

若
$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{14}\sqrt{3}$$

则

$$\begin{aligned}\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=&\\ &\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\\ &-\frac{5}{14}\sqrt{3}\times\frac{4}{7}\sqrt{3}+\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}=\\ &-\frac{60-11}{14\times7}=-\frac{49}{14\times7}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

这与 β 是锐角矛盾，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{14}\sqrt{3}$ 不合题意而舍掉，故 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{14}\sqrt{3}$. 由此得

$$\begin{aligned}\sin\beta=&\frac{11}{14}\cos\alpha-\frac{1}{7}\cos(\alpha+\beta)=\\ &\frac{11}{14}\times\frac{4}{7}\sqrt{3}-\frac{1}{7}\times\frac{5}{14}\sqrt{3}=\frac{39}{98}\sqrt{3}\end{aligned}$$

解本例的重点是要判断 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{14}\sqrt{3}$ 不符已知条件. 因为正弦在第一象限、第二象限都是正的，故由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$，不能直接就肯定 $\alpha+\beta$ 是锐角，因

而 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{14}\sqrt{3}$ 就不要了. 当 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{14}\sqrt{3}$ 时,可以算出 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 此时也不能肯定 β 就是第二象限角,从而否定 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{14}\sqrt{3}$,而只有计算出 $\cos\beta=-\frac{1}{2}$ 时,才可以肯定 β 是第二象限角,与 β 是锐角相矛盾,因而舍去.

例 4　已知 $\cot\alpha=\frac{b}{a}$,求 $a\sin 2\alpha+b\cos 2\alpha$ 的值.

思考方法　已知的角是 α,所求的角是 2α,已知的函数是余切,所求的函数是正弦、余弦. 我们自然容易想到万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

这是把正弦、余弦化为正切的公式,而已知的是余切,则只需用同角关系即可.

解　因为

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\cot^2\alpha-1}{\cot^2\alpha+1}$$

所以

$$a\sin 2\alpha+b\cos 2\alpha=a\cdot\frac{2\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}+b\cdot\frac{\cot^2\alpha-1}{\cot^2\alpha+1}=$$

$$a\cdot\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}+b\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}=$$

$$\frac{2a^2b}{a^2+b^2}+\frac{b^3-ba^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b+b^3}{a^2+b^2}=$$

$$\frac{b(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=b$$

例 5 已知 $\tan 2x=\frac{24}{7}$，求 $3\sin x+4\cos x$ 的值.

思考方法 如果我们仍从函数出发，用万能公式，则将把所求式化为

$$3\sin x+4\cos x=3\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+4\cdot\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

尽管函数的差异消失了，但角的差异扩大了. 若从角出发解决差异，用半角公式将 $\sin x$，$\cos x$ 化为 $\cos 2x$ 的无理根式，则运算变得复杂了. 故我们从已知条件出发，先将 $2x$ 化为 x，然后再用同角关系，将所求的正弦、余弦转化为正切.

解 因为

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{24}{7}$$

所以

$$7\tan x=12-12\tan^2 x$$

即

$$12\tan^2 x+7\tan x-12=0$$

$$(4\tan x-3)(3\tan x+4)=0$$

所以

$$\tan x=\frac{3}{4}\text{或}\tan x=-\frac{4}{3}$$

当 $\tan x=\frac{3}{4}$ 时

$3\sin x+4\cos x=\cos x(3\tan x+4)=$

$$\pm\frac{3\tan x+4}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\pm\frac{\frac{9}{4}+4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=$$

$$\pm\frac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}}=\pm 5$$

当 $\tan x=-\frac{4}{3}$时

$$3\sin x+4\cos x=\pm\frac{3\tan x+4}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\pm\frac{-4+4}{\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}}=0$$

故

$$3\sin x+4\cos x=\pm 5,0$$

例 6　已知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根. 求 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$的值.

思考方法　由已知可得

$$\tan\alpha+\tan\beta=-p$$

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=q$$

可见已知条件与所求的角是单角 α,β 与和角 $\alpha+\beta$ 的差异,故用和角公式可得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{p}{q-1}$$

现在角的差异已消失,剩下只是函数的差异,利用同角关系即可把正弦、余弦转化为正切.

解　$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=$

$\cos^2(\alpha+\beta)[\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q]=$

$\frac{\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=$

$$\frac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}=$$

$$\frac{p^2q+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}=\frac{q[p^2+(q-1)^2]}{(q-1)^2+p^2}=q$$

例 7　设 $0<x<\frac{\pi}{4}$，且有

$$\lg\tan x-\lg\sin x=\lg\cos x-\lg\cot x+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2$$

试求 $\cos x-\sin x$ 的值.

思考方法　条件式中有对数，所求的函数式中无对数，故应将条件中的对数形式化为指数形式.

$$\frac{\tan x}{\sin x}=\frac{9\cos x}{2\sqrt{2}\cot x}$$

所求中的三角函数是正弦、余弦，而上述条件式中有正切、余切，将其化为正弦、余弦即可得

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{9}{2\sqrt{2}}\sin x$$

即

$$\sin x\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

现在条件式与所求的函数式之间只差运算的差异了. 利用

$$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$$

即可达到我们计算之目的.

解　根据对数运算法则，由已知可得

$$\frac{\tan x}{\sin x}=\frac{9\cos x}{2\sqrt{2}\cot x}$$

即

$$\sin x\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

因为 $0<x<\frac{\pi}{4}$,故

$$\cos x-\sin x>0$$

故

$$\cos x-\sin x=\sqrt{1-2\sin x\cos x}=$$
$$\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{9}}=\frac{\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{3}=$$
$$\frac{\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

例 8　已知 $2\tan\alpha+3\sin\beta=7$,$\tan\alpha-6\sin\beta=1$,求 $\sin\alpha$,$\sin\beta$ 的值.

思考方法　由已知条件,若视 $\tan\alpha$,$\sin\beta$ 为未知数,解二元一次方程组,即可求出 $\tan\alpha$,$\sin\beta$. 后者正是所求的对象之一. 对于 $\sin\alpha$,既然已能求得 $\tan\alpha$,则利用同角关系即可.

解　因为

$$2\tan\alpha+3\sin\beta=7 \tag{4}$$

$$\tan\alpha-6\sin\beta=1 \tag{5}$$

解等式(4),(5)组成的关于 $\tan\alpha$,$\sin\beta$ 的未知数的方程组可得

$$\tan\alpha=3,\sin\beta=\frac{1}{3} \tag{6}$$

因为 $\tan\alpha=3$,由同角关系可得

$$\sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{10}} \tag{7}$$

例 9　已知 $\sin x+\sin y=2a$,$\cos x+\cos y=2b$(其中 $ab\neq0$),试求 $\tan(x+y)$ 与 $\tan x+\tan y$ 的值.

思考方法　先看 $\tan(x+y)$,它与已知式有角的

差异以及函数的差异. 为了获得 $x+y$,我们先将已知条件和化积得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2a \tag{8}$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2b \tag{9}$$

由于 $ab\neq0$,所以 $b\neq0$. 将式(8),(9)相除.
可得

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$$

现要求 $\tan(\alpha+\beta)$,只需用正切二倍角公式即可.

再看 $\tan x+\tan y$,它与已知条件有函数的差异. 若将其转化为正弦、余弦之比有

$$\tan x+\tan y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \tag{10}$$

函数的差异消失了,但角的差异扩大了,出现了 $x+y$. 但我们已获得 $\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$,自然想到,用万能公式可将 $\sin(x+y)$ 化为 $\tan\frac{x+y}{2}$. 这样问题已解决一半了. 分母 $\cos x\cos y$ 怎么办? 我们会想到 $\cos x+\cos y=2b$ 在平方后可得 $\cos x\cos y$,但又多出了 $\cos^2 x$ 与 $\cos^2 y$

$$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=4b^2 \tag{11}$$

而 $\cos^2 x$,$\cos^2 y$ 并不知道. 若将 $\cos^2 x+\cos^2 y$ 降幂后化积,正可出现 $\cos(x+y)$,$\cos(x-y)$. 而 $\cos(x-y)$ 还不知道,但 $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$. 这又启发我们将 $\sin x+\sin y=2a$ 平方得

$$\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y=4a^2 \tag{12}$$

将其与 $\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=4b^2$ 相加,因为

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \sin^2 y+\cos^2 y=1$. 即可求出

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \tag{13}$$

用 a, b 表示出来.

总结上述思路,我们发现自己绕了一个大圈子,既然不可避免地要计算 $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$,我们又何必不直接将 $\cos x\cos y$ 积化和变为 $\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$ 呢?

解　因为

$$\sin x+\sin y=2a \tag{14}$$

$$\cos x+\cos y=2b \tag{15}$$

所以

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2a \tag{16}$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2b \tag{17}$$

式(16),(17)相除得

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b} \tag{18}$$

所以

$$\tan(x+y)=\frac{2\tan\frac{x+y}{2}}{1-\tan^2\frac{x+y}{2}}=\frac{2\cdot\frac{a}{b}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{2ab}{b^2-a^2} \tag{19}$$

又

$$(\sin x+\sin y)^2=4a^2 \tag{20}$$

$$(\cos x+\cos y)^2=4b^2 \tag{21}$$

式(20),(21)相加得

$$2+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=4(a^2+b^2)$$

所以

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1$$

故

$$\tan x+\tan y=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=$$

$$\frac{2\cdot\dfrac{2\tan\dfrac{x+y}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x+y}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x+y}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x+y}{2}}+\cos(x-y)}=$$

$$\frac{4\cdot\dfrac{\dfrac{a}{b}}{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}}{\dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}+2(a^2+b^2)-1}=$$

$$\frac{\dfrac{4ab}{a^2+b^2}}{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+2(a^2+b^2)-1}=$$

$$\frac{4ab}{b^2-a^2+2(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)}=$$

$$\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2-a^2}$$

例 10 已知 $\cos(\alpha-3\varphi)=m\cos^3\varphi$，$\sin(\alpha-3\varphi)=m\sin^3\varphi$. 试用 m 表示 $\cos\alpha$ 的值.

思考方法 已知中有角 φ，所求函数 $\cos\alpha$ 用 m 表示，而没有 φ，故我们的想法是设法从已知中消去 φ. 当我们观察条件时，发现直接消去 φ 是困难的，而消去 α

恰是容易的. 我们只需将两个条件分别平方，然后相加，即得

$$\cos^6\varphi+\sin^6\varphi=\frac{1}{m^2} \tag{22}$$

又因为 $\alpha=(\alpha-3\varphi)+3\varphi$，所以

$$\begin{aligned}\cos\alpha=\cos(\alpha-3\varphi)\cos 3\varphi-\sin(\alpha-3\varphi)\sin 3\varphi=\\ m(\cos^3\varphi\cos 3\varphi-\sin^3\varphi\sin 3\varphi)\end{aligned} \tag{23}$$

这样，为了求出 $\cos\alpha$，只需算出式(23)右边括号内的 φ 的函数式用 m 表示即可.

我们已知 $\cos^6\varphi+\sin^6\varphi=\frac{1}{m^2}$，故将

$$\cos^3\varphi\cos 3\varphi-\sin^3\varphi\sin 3\varphi$$

中的 3φ 都转化为 φ，得

$$\begin{aligned}&\cos^3\varphi\cos 3\varphi-\sin^3\varphi\sin 3\varphi=\\ &\cos^3\varphi(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)-\sin^3\varphi(3\sin\varphi-4\sin^3\varphi)=\\ &4(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)-3(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=\\ &\frac{4}{m^2}-3(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\end{aligned} \tag{24}$$

至此，条件 $\cos^6\varphi+\sin^6\varphi=\frac{1}{m^2}$ 与所求 $\cos^4\varphi+\sin^4\varphi$ 只有运算差异，将条件降幂，得

$$(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi)=\frac{1}{m^2} \tag{25}$$

即

$$\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=\frac{1}{m^2}+\sin^2\varphi\cos^2\varphi \tag{26}$$

又

$$\begin{aligned}\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi=\\ 1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\end{aligned} \tag{27}$$

由式(26)，(27)消去 $\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ 得

$$3(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=\frac{2}{m^2}+1 \qquad (28)$$

从而问题得解.

解 由已知条件可得

$$\cos^6\varphi+\sin^6\varphi=\frac{1}{m^2}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha=&\cos[(\alpha-3\varphi)+3\varphi]=\\&\cos(\alpha-3\varphi)\cos 3\varphi-\sin(\alpha-3\varphi)\sin 3\varphi=\\&m(\cos^3\varphi\cos 3\varphi-\sin^3\varphi\sin 3\varphi)=\\&m\left[\frac{4}{m^2}-3(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)\right]=\\&m\left[\frac{4}{m^2}-\left(\frac{2}{m^2}+1\right)\right]=\\&m\left[\frac{2}{m^2}-1\right]=\frac{2}{m}-m\end{aligned}$$

例 11 不查表,试求 $\cos 20°-\sin 10°-\sin 50°$的值.

思考方法 $20°,10°,50°$均不是特殊角,要计算其值,就是要通过变换,将这些角转化为 $30°,45°$或 $60°$之类的特殊角.我们看到$\frac{10+50}{2}=30$.故可将第二项、第三项和化积.

解 $\cos 20°-\sin 10°-\sin 50°=$

$$\begin{aligned}&\cos 20°-2\sin\frac{10°+50°}{2}\cos\frac{10°-50°}{2}=\\&\cos 20°-2\sin 30°\cos 20°=\\&\cos 20°-2\cdot\frac{1}{2}\cos 20°=0\end{aligned}$$

例 12 不查表计算:

$\cos 40°\cos 80°+\cos 80°\cos 160°+\cos 160°\cos 40°$的值.

思考方法　$80^\circ+40^\circ=120^\circ$，$80^\circ+160^\circ=240^\circ$，$160^\circ-40^\circ=120^\circ$. 故若将所有项都积化和，就可以出现一些特殊角的项.

$$\text{原式}=\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(\cos 240^\circ+\cos 80^\circ)+\frac{1}{2}(\cos 200^\circ+\cos 120^\circ)=$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 40^\circ-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 80^\circ-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 200^\circ=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 200^\circ)$$

因为$\frac{40^\circ+80^\circ}{2}=60^\circ$，故把括号内的前两项化积，又可出现特殊角，余下思路与例 11 相同.

解　$\cos 40^\circ\cos 80^\circ+\cos 80^\circ\cos 160^\circ+\cos 160^\circ\cos 40^\circ=$

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 200^\circ)=$$

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos 200^\circ+\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{40^\circ+80^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-80^\circ}{2}=$$

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos 200^\circ+\cos 60^\circ\cos 20^\circ=$$

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos 200^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ=$$

$$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos(180^\circ+20^\circ)+\frac{1}{2}\cos 20^\circ=$$

$$-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ=-\frac{3}{4}$$

例 13　求 $\sin 18^\circ$与 $\cos 18^\circ$的值.

思考方法　通过本例，专门介绍解方程在求值问题上的应用. 我们的想法是，造成一个以 $\sin 18^\circ$为根的

方程，然后解方程，即可得 $\sin 18^\circ$的值.

解 因为

$$\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$$

即

$$\sin(2\times 18^\circ)=\cos(3\times 18^\circ)$$

所以

$$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$$

因为

$$\cos 18^\circ\neq 0$$

故

$$2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$$

即

$$4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0$$

利用二次方程的求根公式即得

$$\sin 18^\circ=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

因为 $\sin 18^\circ>0$，所以

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

所以

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

练习题

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$与 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

2. 已知 $\tan^2\alpha+\sec\alpha=5$，求 $\cos^7\alpha+\sin^7\alpha$ 的值.

3. 已知 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$，求 $\sin^4 x+\cos^4 x$ 的值.

4. 已知 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{25}{12}$，求(1) $\tan^2\theta+\cot^2\theta$；(2) $\tan\theta-\cot\theta$；(3) $\tan^3\theta+\cot^3\theta$ 的值.

5. 设 α,β 都是锐角，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，求 $\cos\beta$ 的值.

6. 设 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=-\dfrac{9}{41}$，$A\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$B\in\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

求(1) $\sin(A+B)$；(2) $\cos(A+B)$；(3) $\sin(2A-B)$；(4) $\cos\left(\dfrac{A}{2}-B\right)$的值.

7. 已知 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，求 $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$ 的值.

8. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，求 $\sin 2\alpha$ 和 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

9. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha-\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\beta$ 的值.

10. 已知 $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3+2\sqrt{2}$，求 $\cot(45^\circ+\alpha)$，$\sin 2\alpha$的值.

11. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=5$，求 $\tan 2\alpha$ 与 $\tan 2\beta$ 的值.

12. 已知 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$的值.

13. 已知 $\tan A=2$，求 $\sin 2A$，$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)$，$\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{3}\right)$的值.

14. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{5}{13}$，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，计算$\dfrac{\cos 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$的值.

15. 已知 $\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta=-\dfrac{1}{3}$，求$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$的值.

16. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=a$，$\cos\alpha+\cos\beta=b$，求$\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$的值.

17. 已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，求$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$的值.

18. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，求$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$的值.

19. 已知 $\cos(x-\alpha)=a$，$\sin(x-\beta)=b$，求 $\sin(\alpha-\beta)$的值.

20. 求下列各式的值：

(1) $\sin 20°+\sin 40°-\sin 80°$；

(2) $\tan 67°30'-\tan 22°30'$；

(3) $\sin 15°$与 $\cos 15°$；

(4) $\sin 3°$，$\cos 6°$，$\sin 9°$.

含三角函数的和与积的等式的证明与计算

第9章

在三角等式的证明或计算中，常会遇到一些三角函数的有限和或有限积的问题. 例如求证

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

与计算

$$\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{2\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\cdots\sin\frac{7\pi}{16}$$

的值之类的问题. 在这些问题中，固然有角的差异、函数的差异，但更突出的是运算的差异. 由于这类问题中所含的项数或因式数往往较大，故对这类问题的解决，有其特殊性. 我们专门用一章来加以讨论. 由于本章讨论的问题是和与积，故自然要用到代数中的数列求和与求积的常用方法，现归纳如下：

1. 数列$\{a_n\}$的 n 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的求和法(拆差求和法).

如果能找到另一个数列$\{b_n\}$,它与数列$\{a_n\}$的通项公式之间有如下关系

$$a_n=b_{n+1}-b_n,(n=1,2\cdots)$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$.

2. 对于数列$\{a_n\}$的 n 项积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的求积法(化商求积法).

如果能找到一个数列$\{b_n\}$,它与数列$\{a_n\}$的通项公式有如下关系

$$a_n=\frac{b_{n+1}}{b_n},(n=1,2,\cdots)$$

则

$$a_1a_2\cdots a_n=\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_{n+1}}{b_1}$$

另外,在本章中,读者将看到复数、复数的三角函数式、棣美弗定理、单位根(1 的 n 次根)等,在三角函数的和与积的证明以及计算中是很有用途的.

例 1 求证

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\cdots+\sin(\alpha+nh)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}} \tag{1}$$

思考方法 左边是和,右边是积商.从运算入手,将左边与右边通分得

$$左边=\frac{1}{\sin\frac{h}{2}}\left[\sin\alpha\sin\frac{h}{2}+\sin(\alpha+h)\sin\frac{h}{2}+\cdots+\right.$$

$$\sin(\alpha+nh)\sin\frac{h}{2}\Big] \tag{2}$$

下面的任务是对括号内的 $n+1$ 项求和.

此时想到拆差求和法,能否将这 $n+1$ 项中的每一项都拆成两项之差,而这两项都是另一个数列中的相邻两项.考虑到 $\alpha,\alpha+h,\alpha+2h,\cdots,\alpha+nh$ 这 $n+1$ 个角以 h 为公差成等差数列.用三角函数中积化差的公式

$$\sin(\alpha+kh)\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k+1}{2}\right)\right]$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

我们见到,由于$\frac{h}{2}$恰是公差 h 之半,故式(3)括号内的两项之差恰是数列

$$\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}h\right)\right\}$$

中的相邻两项之差.由此,最后可得

$$\sin\alpha\sin\frac{h}{2}+\sin(\alpha+h)\sin\frac{h}{2}+\cdots+\sin(\alpha+nh)\sin\frac{h}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]$$

要证它是

$$\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}h$$

只需将其和差化积即可.

证明　由积化差公式得

$$\sin(\alpha+kh)\sin\frac{h}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k+1}{2}h\right)\right] \tag{4}$$

令 $k=0,1,2,\cdots,n$ 代入式(4)即得

$$\sin\alpha\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\sin(\alpha+h)\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right)\right]$$

$$\sin(\alpha+2h)\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5h}{2}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$\sin(\alpha+nh)\sin\frac{h}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]$$

将上述 $n+1$ 个等式相加得

$$[\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\cdots+\sin(\alpha+nh)]\sin\frac{h}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\frac{nh}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]=$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{(n+1)h}{2}$$

所以公式(1)成立

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\cdots+\sin(\alpha+nh)=$$

$$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

在公式(1)中，若用$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 α，用$-h$ 代替 h，即得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+h)\right]+\cdots+\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+nh)\right]=$$

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\right]\sin\frac{(n+1)(-h)}{2}}{\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}$$

据诱导公式，式即可变为

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cdots+\cos(\alpha+nh)=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \tag{5}$$

公式(1)，(5)的左边的三角函数 $n+1$ 项之和中，$n+1$个角 $\alpha,\alpha+h,\cdots,\alpha+nh$ 是以 h 为公差的等差数列，而右边积商形式中的三个角分别是

$$\alpha+\frac{n}{2}h,\frac{(n+1)h}{2},\frac{h}{2}$$

我们容易发现，$\alpha+\frac{nh}{2}$恰是等差数列 $\alpha,\alpha+h,\cdots,\alpha+nh$ 中首项与末项的算术平均值，$\frac{h}{2}$正是公差之半

$$\frac{(n+1)k}{2}=(n+1)\frac{h}{2}$$

恰是公差之半的 $n+1$ 倍. 而这 $n+1$ 则是左边三角函数的项数. 这是公式(1)，(5)左边与右边角之间的差异以及它们内在的联系；在函数方面，公式(1)，(5)左边分别是正弦和、余弦和，而右边的分母与分子中，角$\frac{h}{2}$，$\frac{(n+1)h}{2}$的函数都是正弦，角 $\alpha+\frac{nh}{2}$的函数与左边的求和函数是同名函数；从运算来看，(1)，(5)左边都是和，而右边都是积商. 通过上面的分析，记忆公式(1)，(5)就不困难了. 而这两个公式都是基本的，且是重要的. 因为凡遇角成等差数列的正弦和或余弦和，我们就不必重复公式(1)，(5)的证明过程，而可以直接用此公式了. 例如由公式(1)，(5)我们可以直接获得如下一些结

论

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (6)$$

$$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (7)$$

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\cot\frac{\pi}{2n} \quad (8)$$

$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0 \quad (9)$$

假如对于公式(1),(5)的结论记忆不清,则我们应记住此类数列之求和,是采用拆差求和法,而要实现这一手段,则必须首先对整个和式除以角数列的公差之半的正弦,同时每一项和乘以这个分母,然后用积化差公式即可达到求和之目标.

下面我们对公式(1),(5)提供一个复数证明.

设

$$I=\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\cdots+\sin(\alpha+nh)$$
$$R=\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cdots+\cos(\alpha+nh)$$

则

$$\begin{aligned}R+\mathrm{i}I=&(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+[\cos(\alpha+h)+\mathrm{i}\sin(\alpha+h)]+\cdots+\\&[\cos(\alpha+nh)+\mathrm{i}\sin(\alpha+nh)]=\\&(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)[1+(\cos h+\mathrm{i}\sin h)+\\&(\cos 2h+\mathrm{i}\sin 2h)+\cdots+(\cos nh+\mathrm{i}\sin nh)]=\\&(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)[1+(\cos h+\mathrm{i}\sin h)+\cdots+\\&(\cos h+\mathrm{i}\sin h)^n]=\\&(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot\frac{1-(\cos h+\mathrm{i}\sin h)^{n+1}}{1-(\cos h+\mathrm{i}\sin h)}=\end{aligned}$$

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot\frac{1-\cos(n+1)h-\mathrm{i}\sin(n+1)h}{1-\cos h-\mathrm{i}\sin h}=$$

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot\frac{2\sin^2\frac{(n+1)h}{2}-\mathrm{i}\cdot2\sin\frac{(n+1)h}{2}\cos\frac{(n+1)h}{2}}{2\sin^2\frac{h}{2}-\mathrm{i}\cdot2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}=$$

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot$$

$$\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{h}{2}}=$$

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot$$

$$\frac{\mathrm{i}\left[\cos\frac{(n+1)h}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)h}{2}\right]}{-\mathrm{i}\left(\cos\frac{h}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{h}{2}\right)}=$$

$$\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\left(\cos\frac{nh}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{nh}{2}\right)=$$

$$\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\right]=$$

$$\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\cos\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}+\mathrm{i}\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

根据复数的相等的定义即得

$$R=\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\cos\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$I=\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

这就是公式(5),(1).

用复数对于三角函数数列求和,适用于数列的角成等差数列的情况,因为只有在此时,才能将我们的问题转化为一个复数的等比数列的求和问题.而在这里,棣美弗定理以及复数相等的概念起到了重要的作用.这是我们已经见到了的.

例 2 求和

$$\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx$$

$$\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos nx$$

思考方法 本例也可以用复数方法来求和.这个工作留给读者.本例以及其余各例,我们都是用前几章的传统的方法,将问题转化成公式(1),(5)然后求出和来.

我们观察

$$\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx$$

与公式(1)左边的异同点.首先此数列中的 n 个角以 x 为公差成等差数列,函数均为正弦.不同之处是公式(1)的各项全是正号,而运算式中各项是正负相间.怎么消除此差异呢?诱导公式“奇变偶不变,符号见象限”可以帮助我们保留正弦函数,而把所有的负号变为正号.

$$\begin{aligned}&\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx=\\&\quad\sin(\pi-x)+\sin(2\pi-2x)+\sin(3\pi-3x)+\cdots+\\&\quad\sin(n\pi-nx)=\sin(\pi-x)+\sin 2(\pi-x)+\cdots+\end{aligned}$$

$\sin n(\pi-x)$

同理

$\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos nx=$

$-[\cos(x+\pi)+\cos 2(x+\pi)+\cos 3(x+\pi)+\cdots+$

$\cos n(x+\pi)]$

解　$\sin x-\sin 2x+\sin 3x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx=$

$\sin(\pi-x)+\sin 2(\pi-x)+\cdots+\sin n(\pi-x)=$

$$\frac{\sin\frac{(n+1)(\pi-x)}{2}\sin\frac{n(\pi-x)}{2}}{\sin\frac{\pi-x}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{\pi-x}{2}-\cos\frac{(2n+1)(\pi-x)}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\left[n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}+(-1)^{n+1}\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(2n+1)}{2}x\right]}{2\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}+(-1)^{n+1}\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$$

$\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos nx=$

$-[\cos(x+\pi)+\cos 2(x+\pi)+\cdots+\cos n(x+\pi)]=$

$$-\frac{\cos\frac{(n+1)(x+\pi)}{2}\sin\frac{n(x+\pi)}{2}}{\sin\frac{x+\pi}{2}}=$$

$$-\frac{\sin\frac{(2n+1)(x+\pi)}{2}-\sin\frac{x+\pi}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\left[n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}+(-1)^{n+1}\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$$

例 3 求和

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+h)+\sin^2(\alpha+2h)+\cdots+\sin^2(\alpha+nh)$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+h)+\cos^2(\alpha+2h)+\cdots+\cos^2(\alpha+nh)$$

思考方法 利用二倍角公式，将所求和中各项由二次降为一次. 即转化为公式(5)型问题.

解

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+h)+\sin^2(\alpha+2h)+\cdots+\sin^2(\alpha+nh)=$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)+\frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha+2h)]+\cdots+$$

$$\frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha+2nh)]=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}[\cos 2\alpha+$$

$$\cos(2\alpha+2h)+\cdots+\cos(2\alpha+2nh)]=$$

$$\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(2\alpha+nh)\sin(n+1)h}{\sin h}=$$

$$\frac{n+1}{2}-\frac{\cos(2\alpha+nh)\sin(n+1)h}{2\sin h}$$

同理

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+h)+\cos^2(\alpha+2h)+\cdots+$$

$$\cos^2(\alpha+nh)=\frac{n+1}{2}+\frac{\cos(2\alpha+nh)\sin(n+1)h}{2\sin h}$$

例 4　求和

$$\sin^3\alpha+\sin^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^3\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\sin^3\left(\alpha+\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}\right)$$

思考方法　所求和与公式(1)的差异是立方与一次方的差异.利用正弦三倍角公式可将 n 项立方和转化为一次和.

解　因为

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

所以

$$\sin^3\alpha=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

所以

$$\sin^3\alpha+\sin^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin^3\left[\alpha+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right]=$$

$$\frac{3}{4}\left\{\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left[\alpha+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right]\right\}-$$

$$\frac{1}{4}\left[\sin 3\alpha+\sin\left(3\alpha+\frac{6\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(3\alpha+(n-1)\cdot\frac{6\pi}{n}\right)\right]=$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left[\alpha+(n-1)\frac{\pi}{n}\right]\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}-$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left[3\alpha+(n-1)\cdot\frac{3\pi}{n}\right]\sin\left(n\cdot\frac{3\pi}{n}\right)}{\sin\frac{3\pi}{n}}=$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right]\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}-$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left[3\alpha+\frac{3(n-1)\pi}{n}\right]\sin 3\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}}=0$$

例 5 求和

$$\sin\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta\sin(n+1)\theta$$

思考方法 因为 $\sin k\theta\sin(k+1)\theta=\frac{1}{2}[\cos\theta-\cos(2k+1)\theta]$，$(k=1,2,\cdots n)$. 利用此公式，所求之和就可化为能够利用公式(5)解决的问题.

解 $\sin\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta\sin(n+1)\theta=$

$\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 5\theta)+\cdots+$

$\frac{1}{2}[\cos\theta-\cos(2n+1)\theta]=\frac{n}{2}\cos\theta-$

$\frac{1}{2}[\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cdots+\cos(2n+1)\theta]=$

$\frac{n+1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}[\cos\theta+$

$\cos(\theta+2\theta)+\cdots+\cos(\theta+2n\theta)]=$

$\frac{n+1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(\theta+n\theta)\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=$

$\frac{n+1}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}\frac{\sin 2(n+1)\theta}{\sin\theta}$

例 6 求和

$$\sec\alpha\sec 2\alpha+\sec 2\alpha\sec 3\alpha+\cdots+\sec n\alpha\sec(n+1)\alpha$$

思考方法 此题已不能使用公式(1)或(5)来求和

了.但仍可用拆差求和法解决这个问题.我们知道

$$\sec k\alpha\sec(k+1)\alpha=\frac{1}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}$$

而若将 $\tan(k+1)\alpha-\tan k\alpha$ 化积可得

$$\tan(k+1)\alpha-\tan k\alpha=\frac{\sin[(k+1)\alpha-k\alpha]}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}$$

故　$\sec k\alpha\sec(k+1)\alpha=\csc\alpha[\tan(k+1)\alpha-\tan k\alpha]$

利用拆差求和法即可求出本例之和.

解　因为 $\sec k\alpha\sec(k+1)\alpha=\csc\alpha[\tan(k+1)\alpha-\tan k\alpha]$,

所以

$$\sec\alpha\sec 2\alpha+\sec 2\alpha\sec 3\alpha+\cdots+\sec n\alpha\sec(n+1)\alpha=\csc\alpha(\tan 2\alpha-\tan\alpha)+\csc\alpha(\tan 3\alpha-\tan 2\alpha)+\cdots+\csc\alpha[\tan(n+1)\alpha-\tan n\alpha]=\csc\alpha[\tan(n+1)\alpha-\tan\alpha]=\csc\alpha\cdot\frac{\sin n\alpha}{\cos\alpha\cos(n+1)\alpha}=\frac{2\sin n\alpha}{\sin 2\alpha\cos(n+1)\alpha}$$

例 7　求和

$$\cos 2\alpha\csc 3\alpha+\cos 6\alpha\csc 9\alpha+\cos 18\alpha\csc 27\alpha+\cdots+\cos 2\cdot 3^{n-1}\alpha\csc 3^{n}\alpha$$

思考方法　$\cos 2\cdot k^{k-1}\alpha\csc 3^{k}\alpha=\frac{\cos 2\cdot 3^{k-1}\alpha}{\sin 3^{k}\alpha}=\frac{2\cos 2\cdot 3^{k-1}\alpha\sin 3^{k-1}\alpha}{2\sin 3^{k}\alpha\sin 3^{k-1}\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3^{k}\alpha-\sin 3^{k-1}\alpha}{\sin 3^{k}\alpha\sin 3^{k-1}\alpha}=\frac{1}{2}(\csc 3^{k-1}\alpha-\csc 3^{k}\alpha)$　$(k=1,2,\cdots n)$

故可用拆差求和法.

解　因为

$$\cos 2\cdot 3^{k-1}\alpha\csc 3^{k}\alpha=\frac{1}{2}(\csc 3^{k-1}\alpha-\csc 3^{k}\alpha)$$

所以

$$\cos 2\alpha\csc 3\alpha+\cos 6\alpha\csc 9\alpha+\cdots+\cos 2\cdot 3^{n-1}\alpha\csc 3^n\alpha=$$

$$\frac{1}{2}(\csc\alpha-\csc 3\alpha)+\frac{1}{2}(\csc 3\alpha-\csc 9\alpha)+$$

$$\frac{1}{2}(\csc 9\alpha-\csc 27\alpha)+\cdots+\frac{1}{2}(\csc 3^{n-1}\alpha-\csc 3^n\alpha)=$$

$$\frac{1}{2}(\csc\alpha-\csc 3^n\alpha)=\frac{\sin 3^n\alpha-\sin\alpha}{2\sin\alpha\sin 3^n\alpha}$$

例 8 求和：

$$\sin^2\theta\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\sin 2^2\theta+\frac{1}{2^2}\sin^2 2^2\theta\sin 2^3\theta+\cdots+$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sin^2 2^{n-1}\theta\sin 2^n\theta.$$

思考方法 对于$\frac{1}{2^{k-1}}\sin^2 2^{k-1}\theta\sin 2^k\theta$，由于 $2^k\theta$ 恰是 $2^{k-1}\theta$ 的二倍角，故有

$$\frac{1}{2^{k-1}}\sin^2 2^{k-1}\theta\sin 2^k\theta=\frac{1}{2^k}(1-\cos 2^k\theta)\sin 2^k\theta=$$

$$\frac{1}{2^k}\sin 2^k\theta-\frac{1}{2^k}\cos 2^k\theta\sin 2^k\theta=$$

$$\frac{1}{2^k}\sin 2^k\theta-\frac{1}{2^{k+1}}\sin 2^{k+1}\theta \qquad (k=1,2,\cdots n)$$

利用拆差求和法即可.

解 $\sin^2\theta\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\sin 2^2\theta+\cdots+$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sin^2 2^{n-1}\theta\sin 2^n\theta=\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2^2}\sin 2^2\theta\right)+$$

$$\left(\frac{1}{2^2}\sin 2^2\theta-\frac{1}{2^3}\sin 2^3\theta\right)+\left(\frac{1}{2^3}\sin 2^3\theta-\frac{1}{2^4}\sin 2^4\theta\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{2^n}\sin 2^n\theta-\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2^{n+1}\theta\right)=$$

$\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2^{n+1}\theta$

例 9　求和：

(1) $\arctan \frac{1}{1+1+1^2}+\arctan \frac{1}{1+2+2^2}+\cdots+\arctan \frac{1}{1+n+n}$；

(2) $\arctan \frac{2}{2+1^2+1^4}+\arctan \frac{4}{2+2^2+2^4}+\cdots+\arctan \frac{2n}{2+n^2+n^4}$；

思考方法　我们知道

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

若 α,β 都是锐角，且 $\alpha>\beta$. 令 $\tan\alpha=x,\tan\beta=y$. 则

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{1+xy}$$

故

$$\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\alpha-\beta$$

即

$$\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan x-\arctan y$$

由此公式即可用拆差求和法解本例中的两题.

解(1)　因为

$$\arctan\frac{1}{1+n+n^2}=\arctan\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\arctan(n+1)-\arctan n$$

由此

$$\arctan\frac{1}{1+1+1^2}+\arctan\frac{1}{1+2+2^2}+\cdots+$$

$$\arctan\frac{1}{1+n+n^2}=(\arctan 2-\arctan 1)+$$

$$(\arctan 3-\arctan 2)+\cdots+(\arctan(n+1)-$$

$$\arctan n)=\arctan(n+1)-\arctan 1=$$

$$\arctan\frac{(n+1)-1}{1+(n+1)\cdot 1}=\arctan\frac{n}{n+2}$$

(2)因为

$$\arctan\frac{2n}{2+n^2+n^4}=\arctan\frac{2n}{1+1+n^2+n^4}=$$

$$\arctan\frac{2n}{1+1+2n^2+n^4-n^2}=\arctan\frac{2n}{1+(1+n^2)^2-n^2}=$$

$$\arctan\frac{(1+n+n^2)-(1-n+n^2)}{1+(1+n+n^2)(1-n+n^2)}=$$

$$\arctan(1+n+n^2)-\arctan(1-n+n^2)=$$

$$\arctan(1+n+n^2)-\arctan[1+(n-1)+(n-1)^2]$$

由此

$$\arctan\frac{2}{2+1^2+1^4}+\arctan\frac{4}{2+2+2^4}+\cdots+$$

$$\arctan\frac{2n}{2+n^2+n^4}=[\arctan(1+1+1^2)-$$

$$\arctan(1+0+0^2)]+\cdots+$$

$$\{\arctan(1+n+n^2)-\arctan[1+(n-1)+$$

$$(n-1)^2]\}=\arctan(1+n+n^2)-\arctan 1=$$

$$\arctan\frac{1+n+n^2-1}{1+(1+n+n^2)}=\arctan\frac{n+n^2}{2+n+n^2}$$

以上几个例子，着重介绍了拆差求和法在三角数列的求和问题中的应用.但拆得好是很不容易的.为此举出这些例子，供读者在解决相似问题时借鉴.

例 10 求和

$$S_1=\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx$$

$$S_2=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx$$

思考方法　本例固然也可以借用公式(1),(5)来求值.但我们再次提供一个复数方法求和.在代数中我们易证

$$z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n=\frac{nz^{n+1}}{z-1}-\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2} \tag{10}$$

若令 $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,则 $z^k=\cos kx+\mathrm{i}\sin kx$

从而

$$S_1+iS_2=\frac{nz^{n+1}}{z-1}-\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2} \tag{11}$$

现在只需将式(11)右端用 $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 代入计算出它的复数值,然后令实部、虚部系数分别等于 S_1,S_2 即可.

解　当 $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 时

$$z-1=-1+\cos x+\mathrm{i}\sin x=-2\sin^2\frac{x}{2}+$$

$$2\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\right)$$

这样

$$(z-1)^2=-4\sin^2\frac{x}{2}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$$

由此

$$\frac{nz^{n+1}}{z-1}=\frac{n[\cos(n+1)x+\mathrm{i}\sin(n+1)x]}{2\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\right)}=$$

$$\frac{n}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\mathrm{i}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

同样地

$$\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}=\frac{z(z^n-1)}{(z-1)^2}=$$

$$\frac{(\cos x+i\sin x)\cdot\left[-2\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}-i\cos\frac{nx}{2}\right)\right]}{-4\sin^2\frac{x}{2}(\cos x+i\sin x)}=$$

$$\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}-i\cos\frac{nx}{2}\right)=$$

$$\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}-i\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

因此

$$S_1+iS_2=\frac{nz^{n+1}}{z-1}-\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}=$$

$$\frac{n}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-i\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-$$

$$\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}-i\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\left[\frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right]+$$

$$i\left[\frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right]$$

所以

$$S_1=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$S_2=\frac{\sin nx-2n\sin\frac{x}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

通过本例,读者可以看到,针对一个三角函数数列的求和问题,我们是如何去造成一个代数中的复数数列求和的.读者应细心领会,仿此能解决一些问题.

例 11　求证

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}$$

思考方法　我们采用化商求积法.因为

$$\cos\theta=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$$

分别令

$$\alpha=\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2^2},\cdots\frac{\theta}{2^n}$$

即可解决问题.

证明　$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=$

$$\frac{\sin\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2^2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2^2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2^3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}{2\sin\dfrac{\theta}{2^n}}=$$

$$\frac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}$$

关于求三角函数数列的积,除了用化商求积法外,利用单位根的性质可求得一系列公式,介绍如下.

我们知道,$1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$,故 1 的 n 个 n 次根可用复数开方公式求得

$$\sqrt[n]{\cos 0+\mathrm{i}\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$(k=0,1,\cdots n-1)$$

根据多项式的根与多项式的因式之间的关系,可得

$$x^n-1=(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$

其中

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}(k=0,1,\cdots,n-1)$$

同样，我们求 1 的 $2n$ 个 $2n$ 次根，可将 $2^{2n}-1$ 在复数范围内分解为 $2n$ 个一次因式之积

$$x^{2n}-1=(x-1)(x+1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{-1})(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_{-2})\cdots(x-\varepsilon_{n-1})(x-\varepsilon_{-(n-1)})$$

其中

$$\varepsilon_k=\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$\varepsilon_{-k}=\cos\frac{k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}(k=1,2,\cdots,n-1)$$

因为

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{-k})=\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1(k=1,2,\cdots,n-1)$$

故 $x^{2n}-1$ 在实数范围中可以分解为

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)\tag{12}$$

由此可得公式

$$\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1\tag{13}$$

类似地,我们可以获得如下公式

$$\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{2n}+1\right)\cdot$$

$$\left(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{2n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{2n-1}{2n}\pi+1\right)=$$

$$x^{2n}+1 \tag{14}$$

$$\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2n+1}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{2n+1}+1\right)\cdots\cdot$$

$$\left(x^2-2x\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+1\right)=x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1 \tag{15}$$

$$\left(x^2+2x\cos\frac{2\pi}{2n+1}+1\right)\left(x^2+2x\cos\frac{4\pi}{2n+1}+1\right)\cdots\cdot$$

$$\left(x^2+2x\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+1\right)=x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots-x+1 \tag{16}$$

例 12　求证:

$$(1)\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \tag{17}$$

$$(2)\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=$$

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} \tag{18}$$

$$(3)\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\sin\frac{5\pi}{4n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n} \tag{19}$$

$$(4)\cos\frac{\pi}{4n}\cos\frac{3\pi}{4n}\cos\frac{5\pi}{4n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n} \tag{20}$$

证明(1)在公式(13)中,令 $x=1$ 即得

$$\left(2-2\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdots\left(2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=n$$

即

$$2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cdot$$

$$\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=n$$

即

$$2^{2n-2}\sin^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}=n \qquad (21)$$

式(21)两边开方得

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

(2)在公式(15)中,令 $x=1$ 即得

$$2^n\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{2n+1}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)=2n+1$$

即

$$2^{2n}\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}=2n+1$$

两边开方得

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

(3)在公式(14)中,令 $x=1$,即得

$$2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\left(1-\cos\frac{5\pi}{2}\right)\cdots$$

$$\left(1-\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)=2$$

即

$$2^{2n}\sin^2\frac{\pi}{4n}\sin^2\frac{3\pi}{4n}\sin^2\frac{5\pi}{4n}\cdots\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}\pi=2$$

所以

$$\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

(4)在公式(14)中,令 $x=-1$,即得

$$2^{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(1+\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)=2$$

即

$$2^{2n}\cos^{2}\frac{\pi}{4n}\cos^{2}\frac{3\pi}{4n}\cdots\cos^{2}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=2$$

所以

$$\cos\frac{\pi}{4n}\cos\frac{3\pi}{4n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^{n}}$$

例 13　求 $\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{2\pi}{16}\cdots\sin\frac{7\pi}{16}$的值.

解　在公式(17)中令 $n=8$ 即得

$$\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{2\pi}{16}\cdots\sin\frac{7\pi}{16}=\frac{\sqrt{8}}{2^{7}}=\frac{\sqrt{2}}{64}$$

例 14　求 $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}$的值.

解　公式(18)中含 $\pi=3$ 可得

$$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{8}}{2^{3}}=\frac{\sqrt{7}}{8}$$

利用练习题中的第 4 题的公式(22)可得

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{8}$$

所以

$$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$$

练习题

1. 求和：

(1) $\sin\alpha\cos 3\alpha+\sin 3\alpha\cos 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha\cos(2n+1)\alpha$；

(2) $\cos^2\theta+\cos^2 3\theta+\cdots+\cos^2(2n-1)\theta$；

(3) $\sin^3\theta+\sin^3 2\theta+\cdots+\sin^3 n\theta$；

(4) $\cos^3\alpha+\cos^3\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos^3\left(\alpha-\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right)$；

(5) $\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos(2n+1)\alpha}$；

(6) $\sin\alpha\sec 3\alpha+\sin 3\alpha\sec 9\alpha+\cdots+\sin 3^{n-1}\alpha\sec 3^n\alpha$；

(7) $\csc\theta\csc 3\theta+\csc 3\theta\csc 5\theta+\cdots+\csc(2n-1)\theta\csc(2n+1)\theta$；

(8) $\tan\dfrac{\alpha}{2}\sec\alpha+\tan\dfrac{\alpha}{2^2}\sec\dfrac{\alpha}{2}+\cdots+\tan\dfrac{\alpha}{2^n}\sec\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$；

(9) $\tan\alpha+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{\alpha}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\tan\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$；

(10) $\arctan\dfrac{x}{1\cdot 2+x^2}+\arctan\dfrac{x}{2\cdot 3+x^2}+\cdots+$

$\arctan\dfrac{x}{n(n+1)+x^2}$;

(11) $\arctan\dfrac{2}{1-1^2+1^4}+\arctan\dfrac{4}{1-2^2+2^4}+\cdots+\arctan\dfrac{2n}{1-n^2+n^4}$.

2.利用复数求和:

(1) $S_1=1+a\cos x+a^2\cos 2x+\cdots+a^n\cos nx$;

(2) $S_2=a\sin x+a^2\sin 2x+\cdots+a^n\sin nx$.

3.求积

$$\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2^2}+\cos\frac{b}{2^2}\right)\cdots\left(\cos\frac{a}{2^n}+\cos\frac{b}{2^n}\right)$$

4.利用公式(16)证明:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cos\frac{6\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m+1}}{2^{2m+1}} & \text{当 } n=2m+1 \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}} & \text{当 } n=2m \text{ 时.}\end{cases}\tag{22}$$

5.求值:

(1) $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cdots\cos\dfrac{7\pi}{15}$;

(2) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}$;

(3) $\sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{14}$;

(4) $\sin 6^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ$;

(5) $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ$.